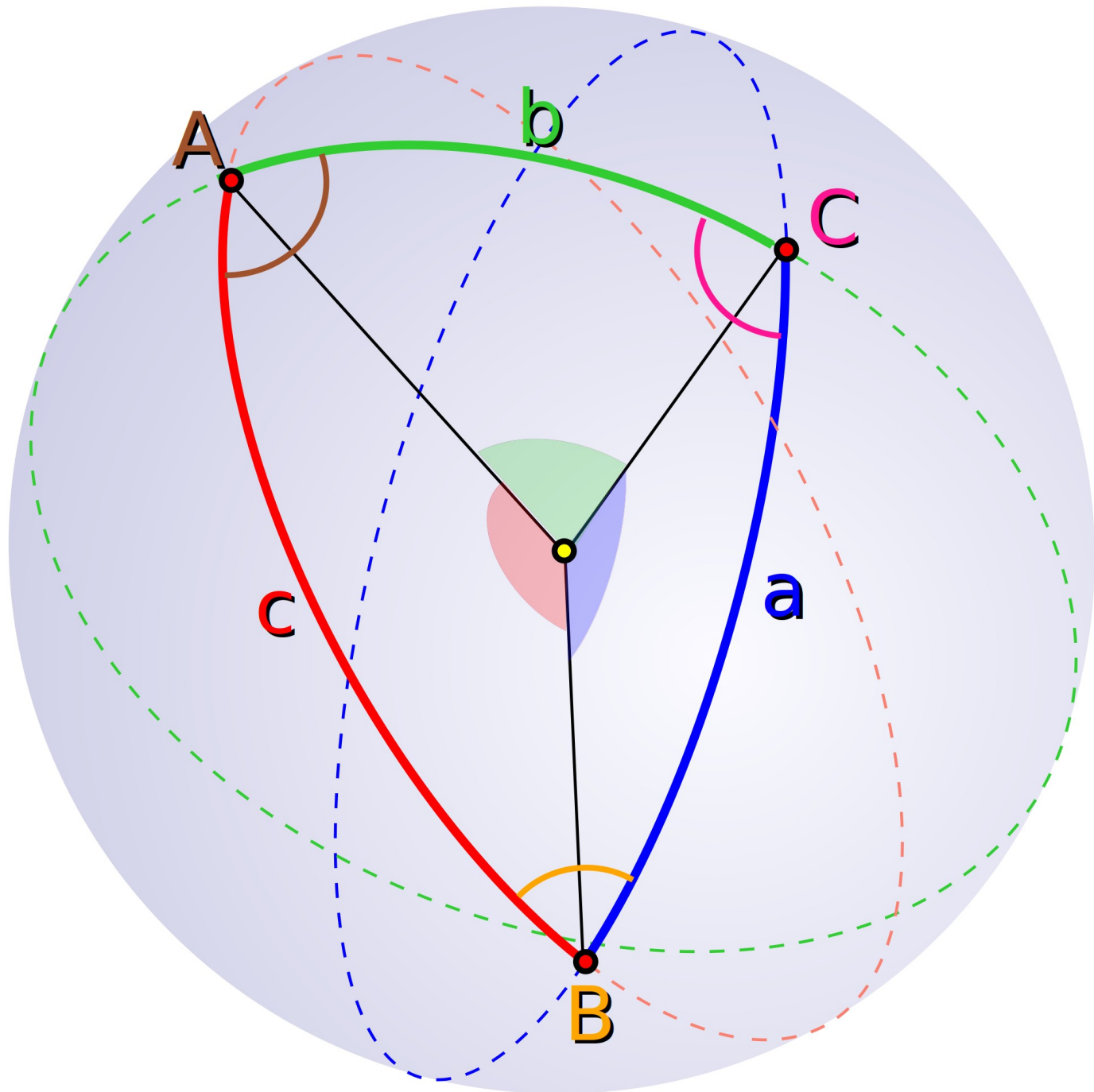


Wykład udostępniam na licencji Creative Commons:



Wędrówki między układami współrzędnych.

Piotr A. Dybczyński

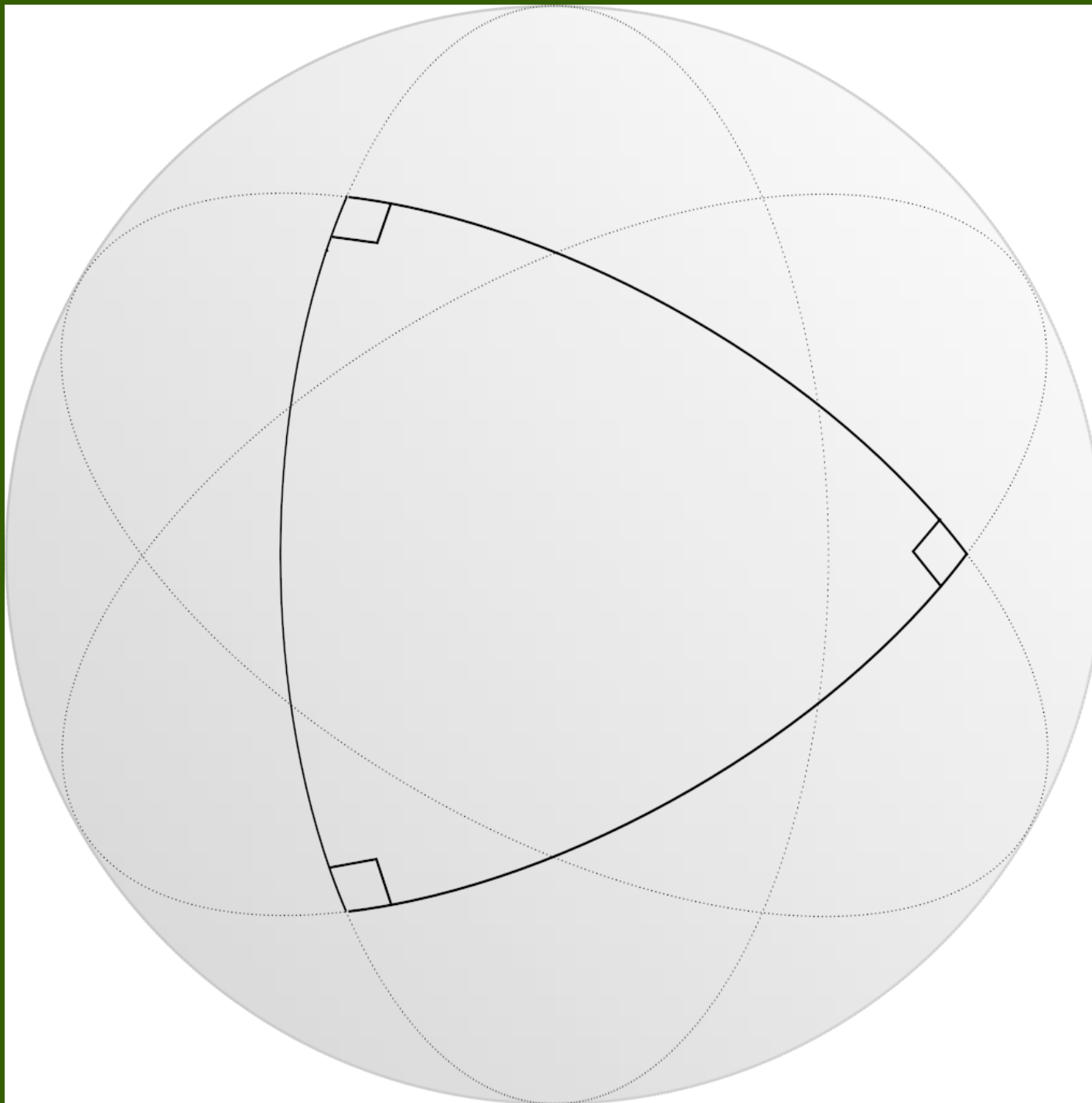


Trójkąt sferyczny

Zarówno
boki: **a, b, c**
jak i kąty:
A, B, C
opisujemy
w mierze
kątovej.

Trójkąt sferyczny eulerowski

- Warunek: każdy bok jest mniejszy od 180°
- Właściwości:
 - obwód jest mniejszy niż obwód koła wielkiego (2π)
 - suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku
 - suma kątów wewnętrznych mieści się między π i 3π
 - możliwy jest trójkąt o dwóch a nawet trzech kątach prostych



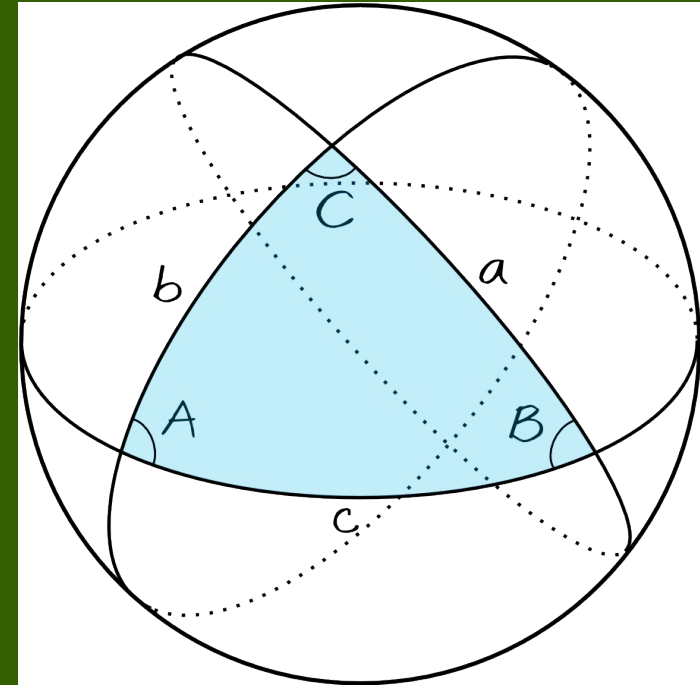
Możliwy jest na przykład trójkąt sferyczny o trzech kątach prostych.

**Grafika:
Coyau/Wikimedia**

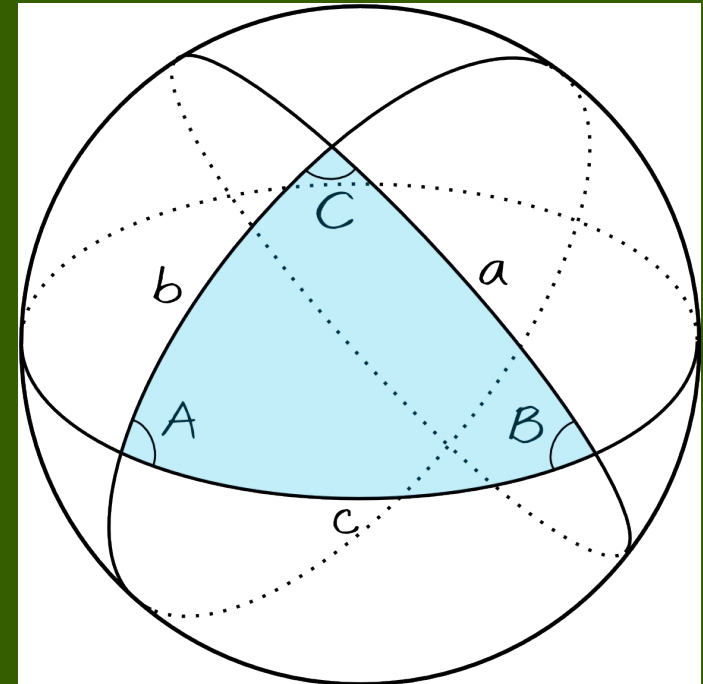
Trygonometria sferyczna

Wzory sinusów:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$



Trygonometria sferyczna



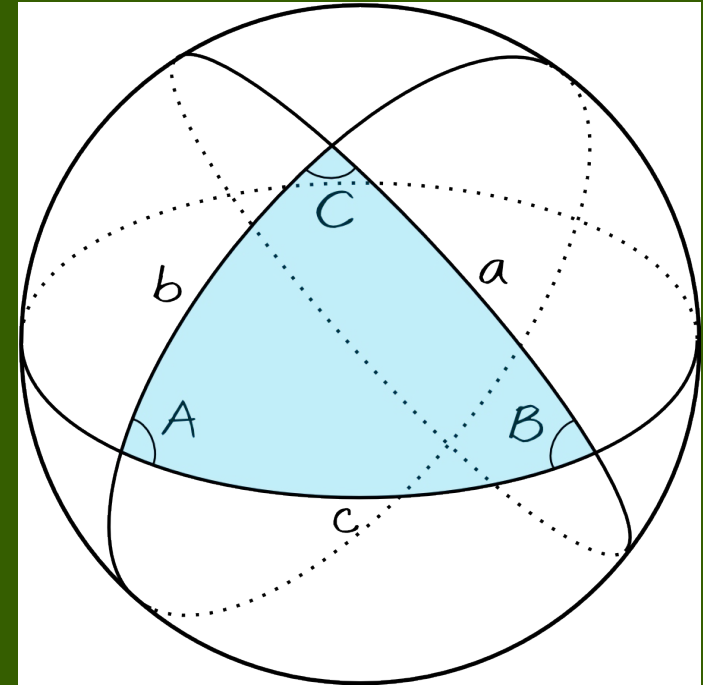
Wzory cosinusów dla boków:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos C$$

Trygonometria sferyczna



Wzory cosinusów dla kątów:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

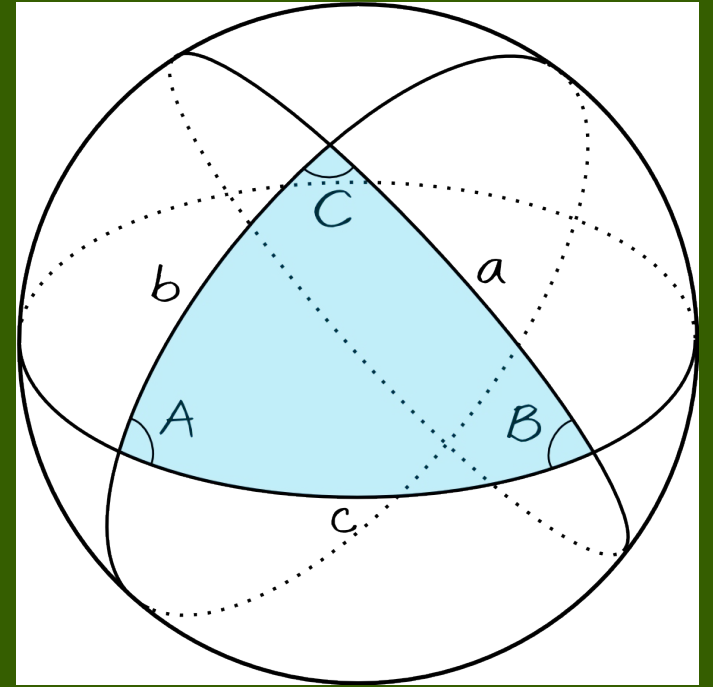
$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$

$$\cos C = -\cos B \cdot \cos A + \sin B \cdot \sin A \cdot \cos c$$

Trygonometria sferyczna

Wzory pięcioelementowe dla boków:

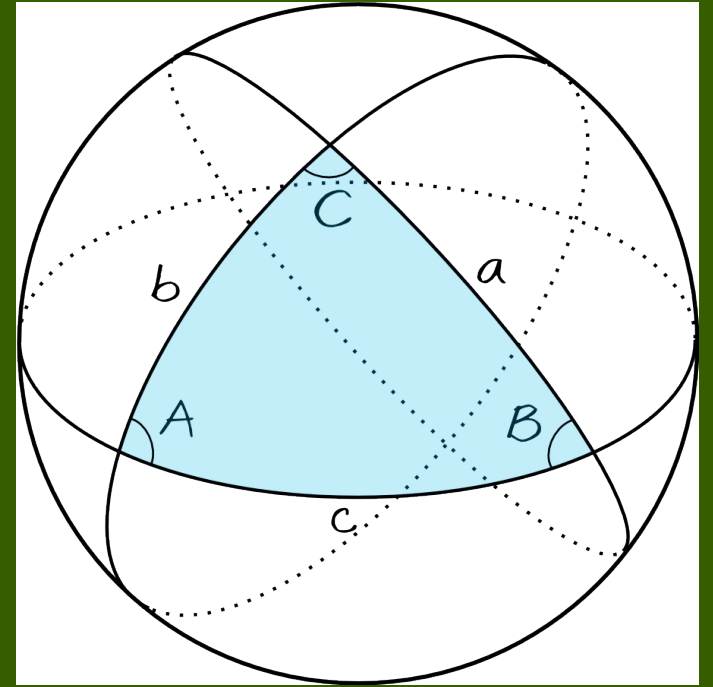
$$\begin{aligned}\sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \\ \sin b \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B \\ \sin c \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C \\ \sin a \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A \\ \sin b \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B \\ \sin c \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C\end{aligned}$$



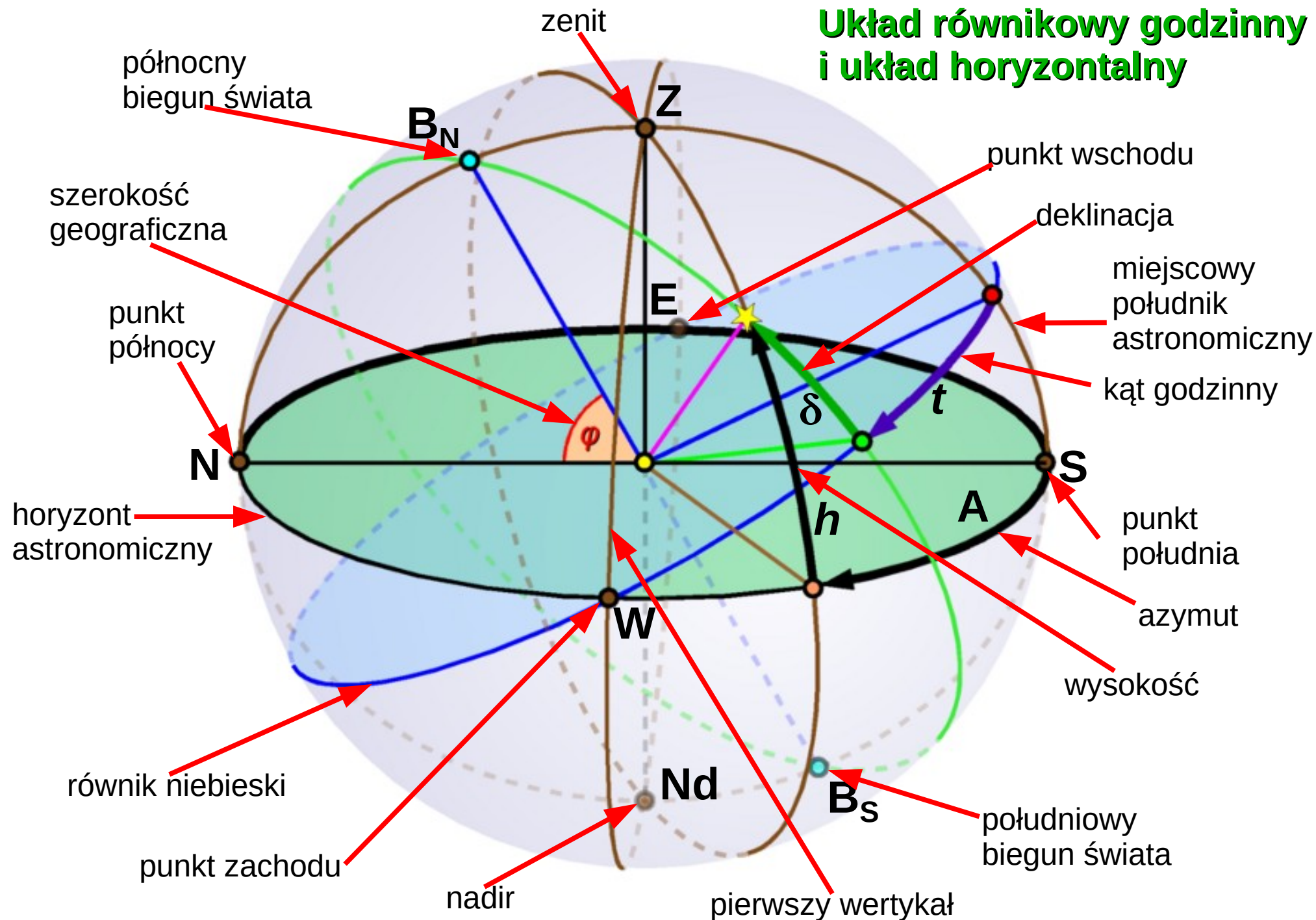
Trygonometria sferyczna

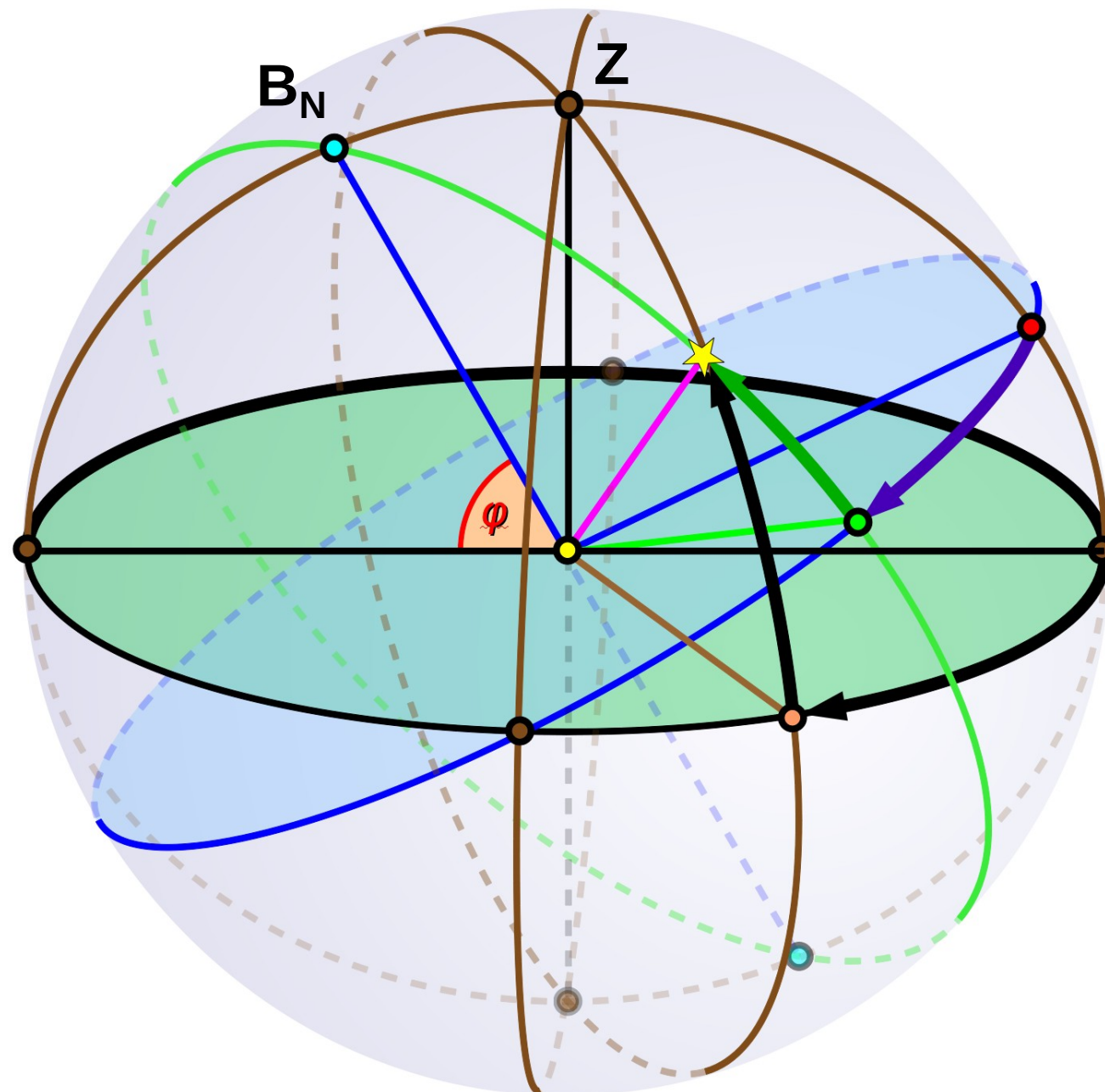
Wzory pięcioelementowe dla kątów:

$$\begin{aligned}\sin A \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a \\ \sin A \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a \\ \sin B \cdot \cos a &= \cos A \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b \\ \sin B \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin A + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b \\ \sin C \cdot \cos a &= \cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c \\ \sin C \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin A + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos c\end{aligned}$$

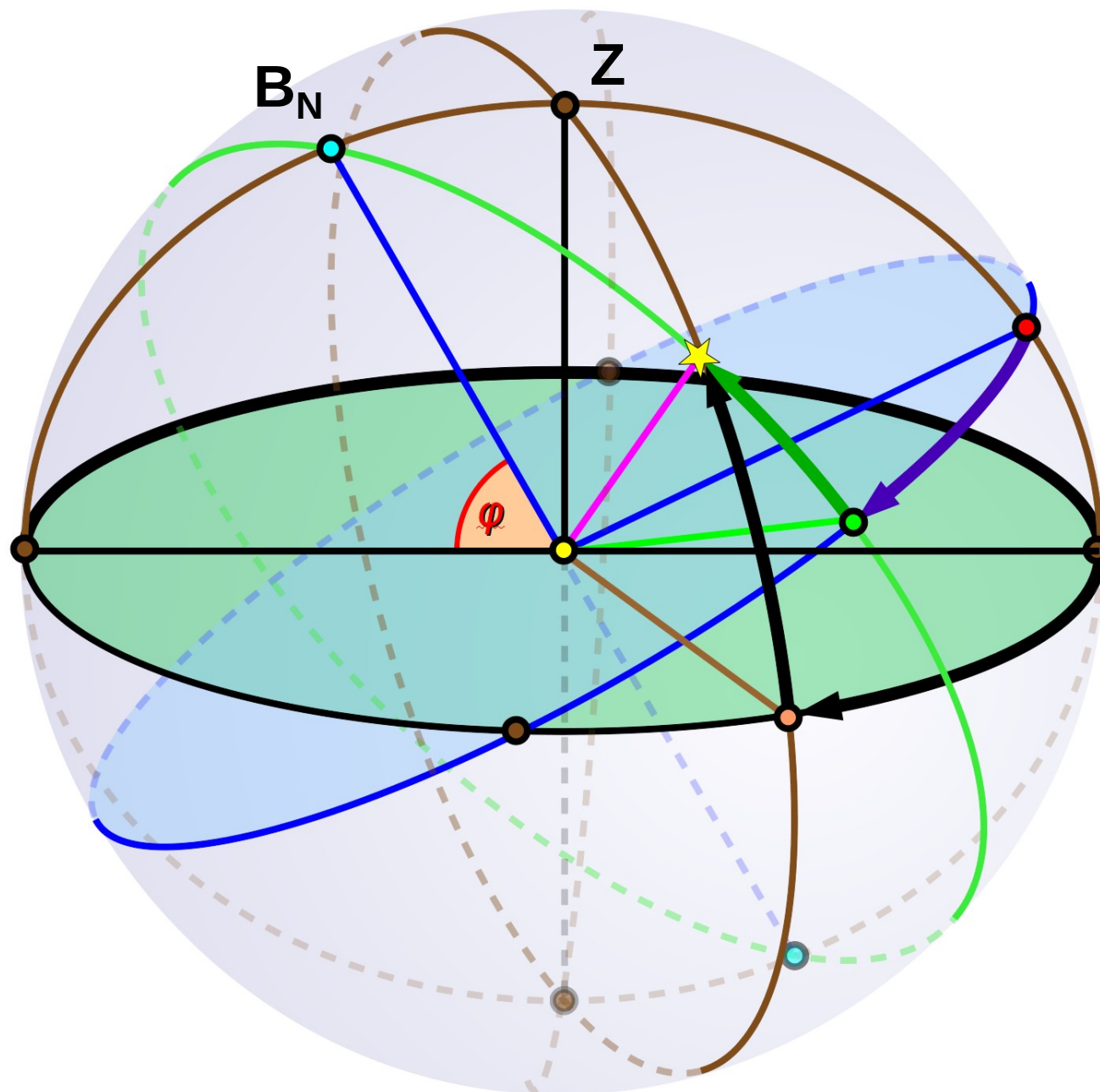


Układ równikowy godzinny i układ horyzontalny

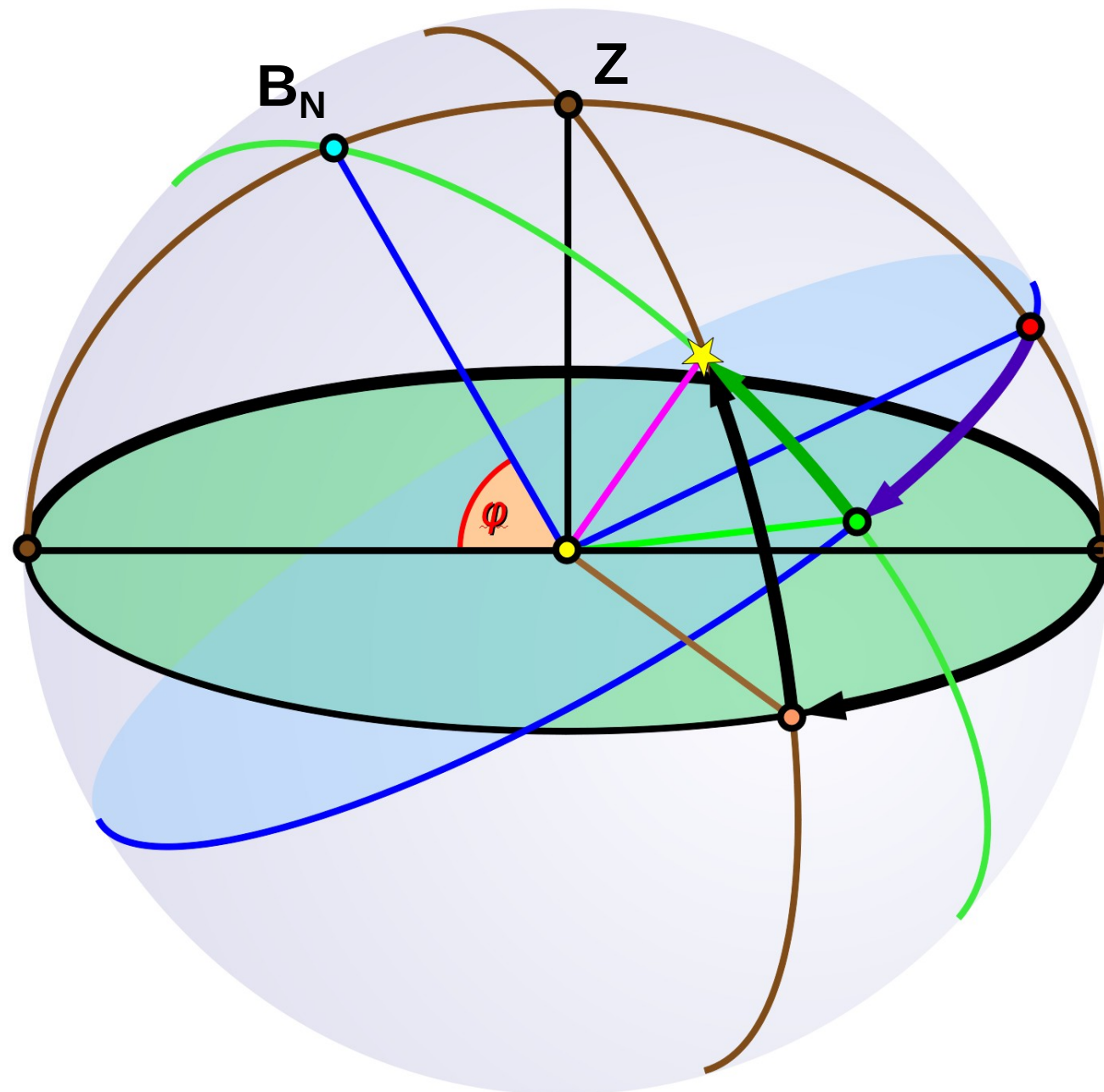


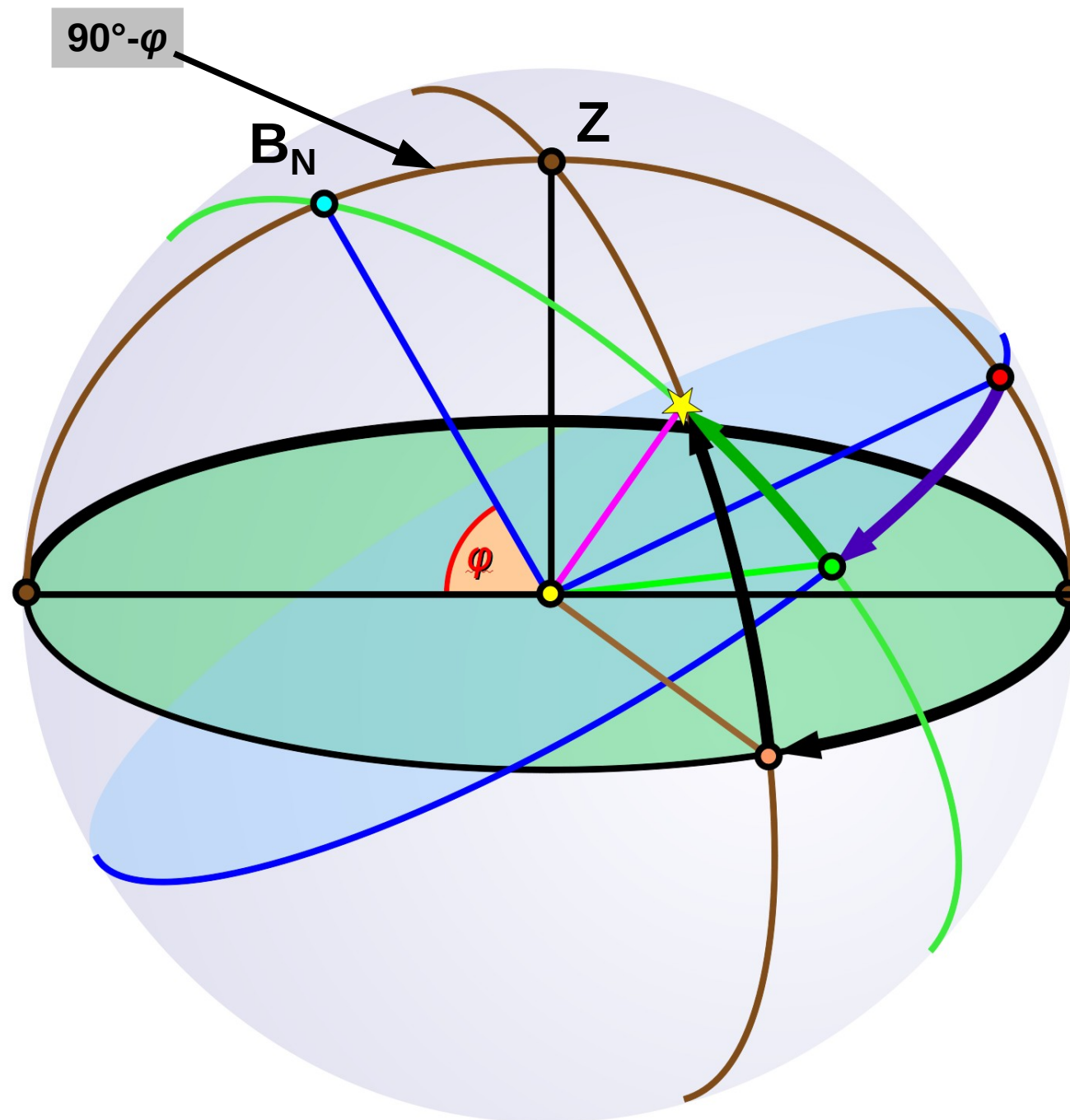


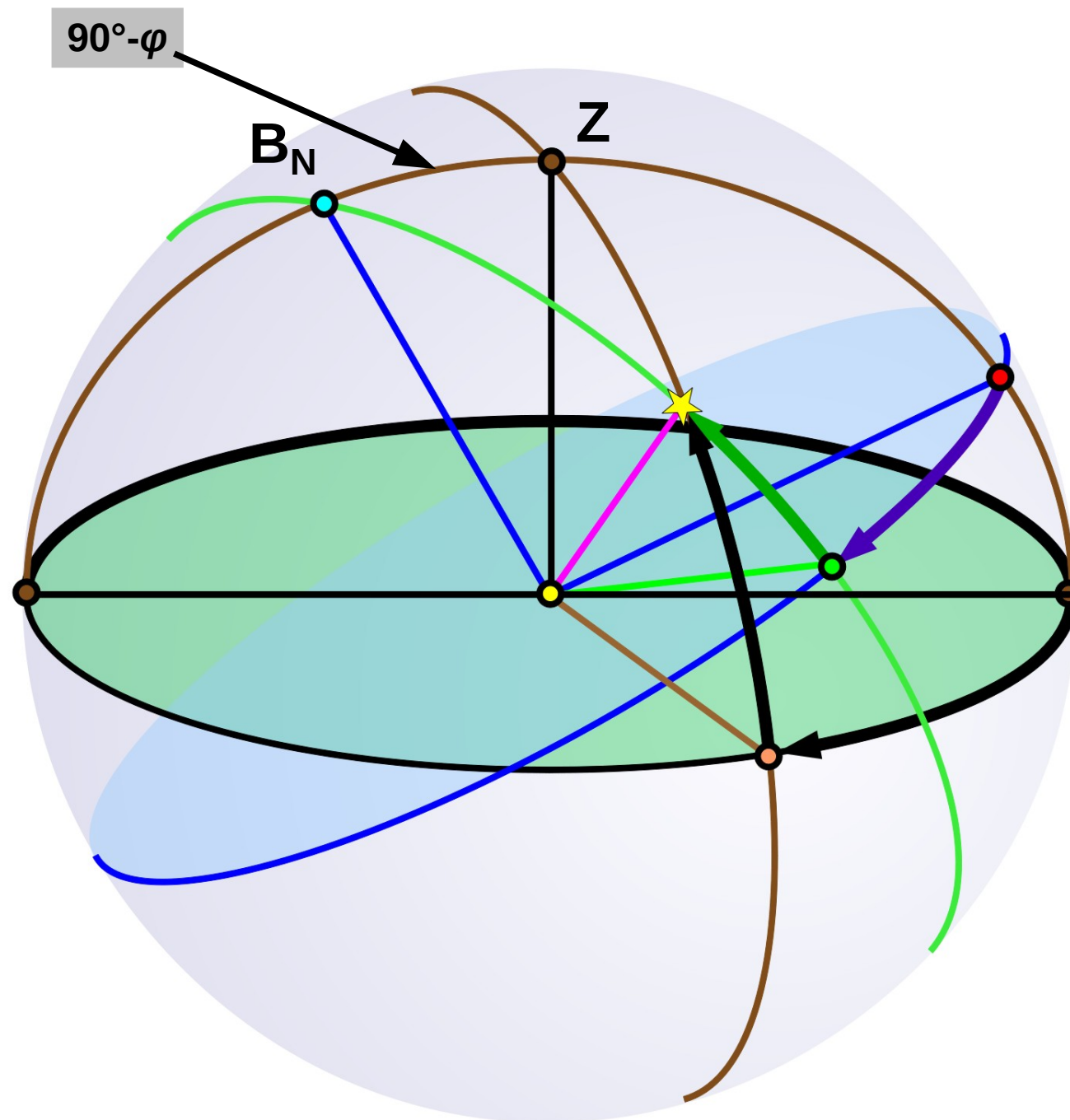


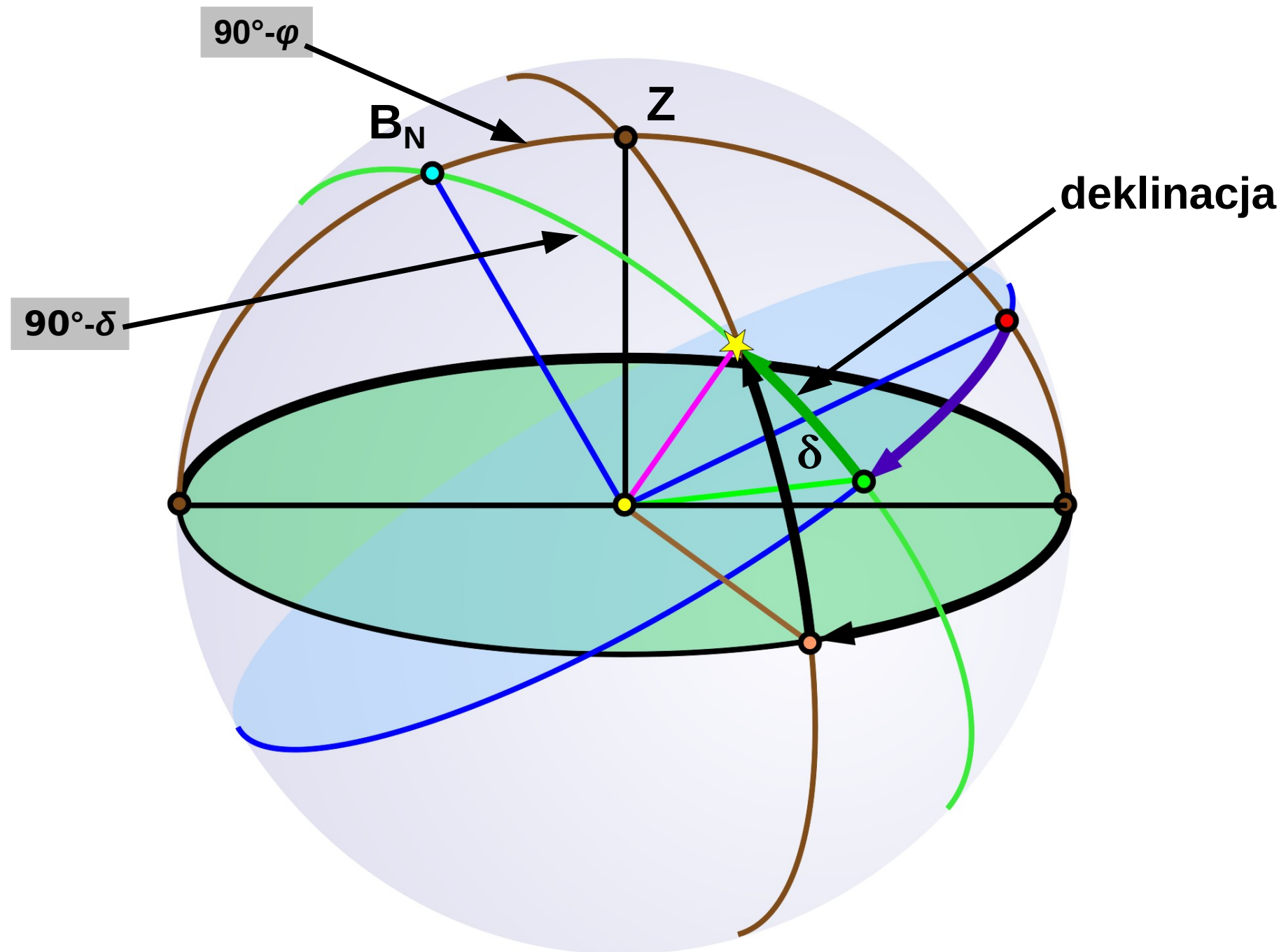


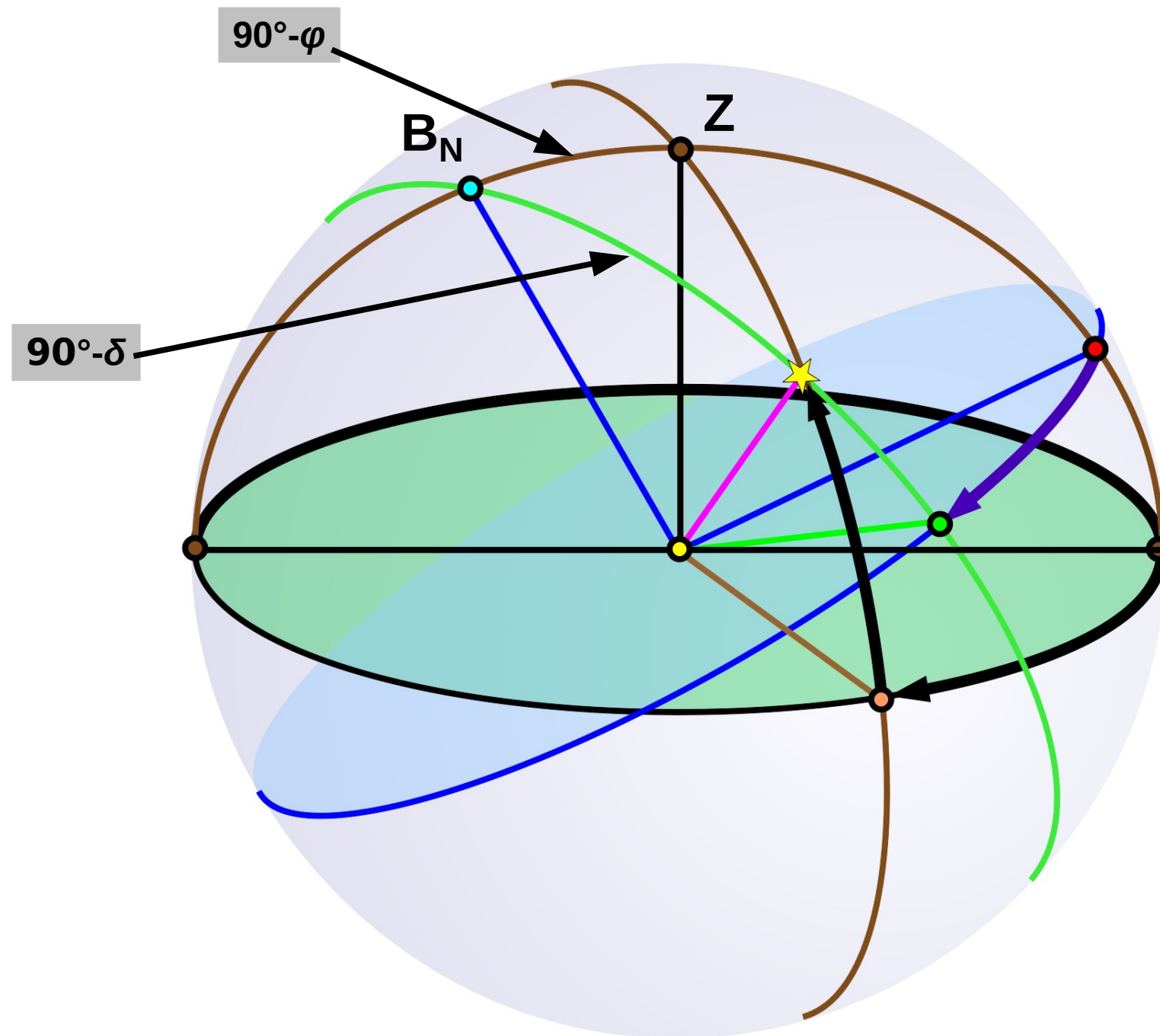


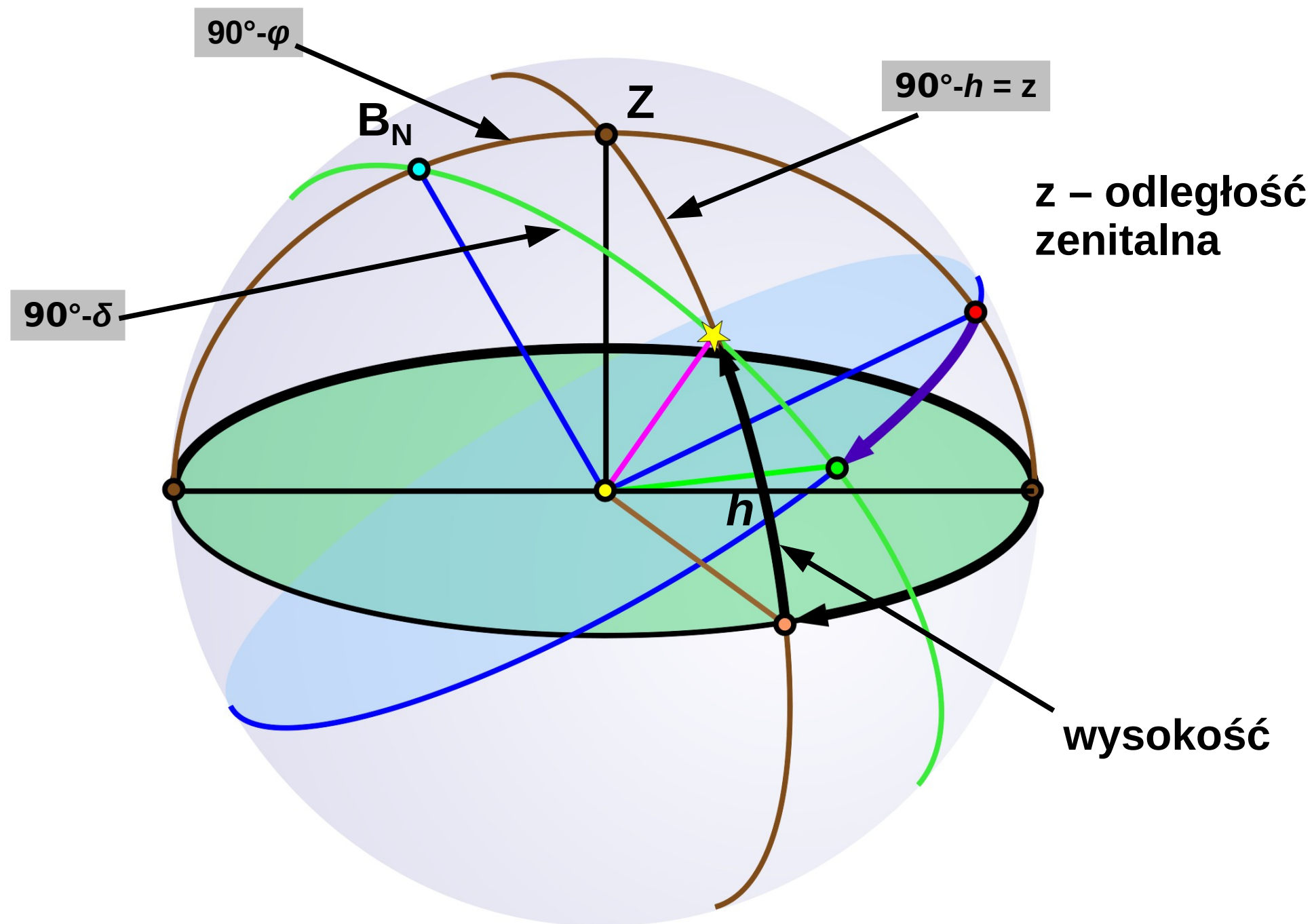


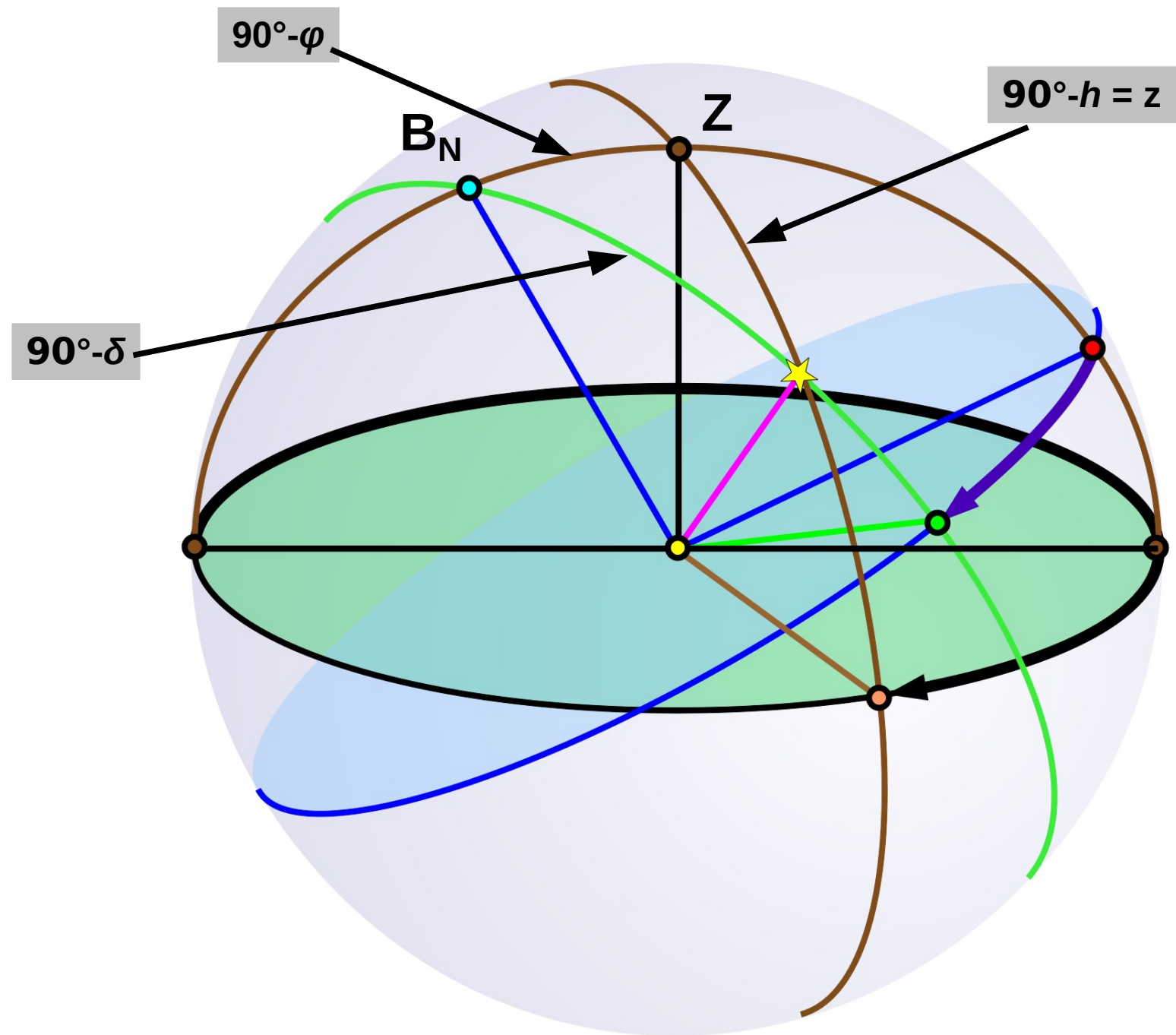


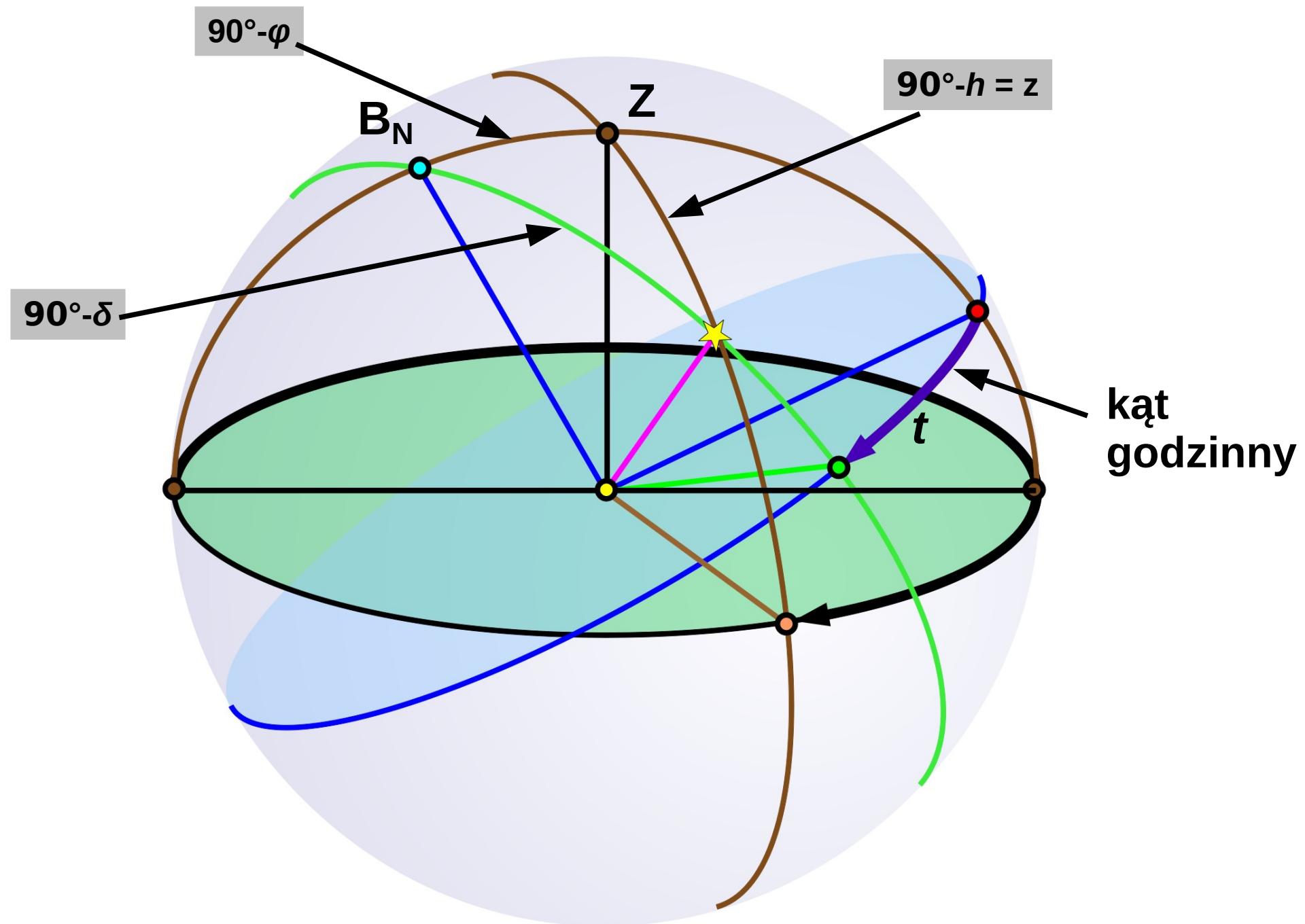


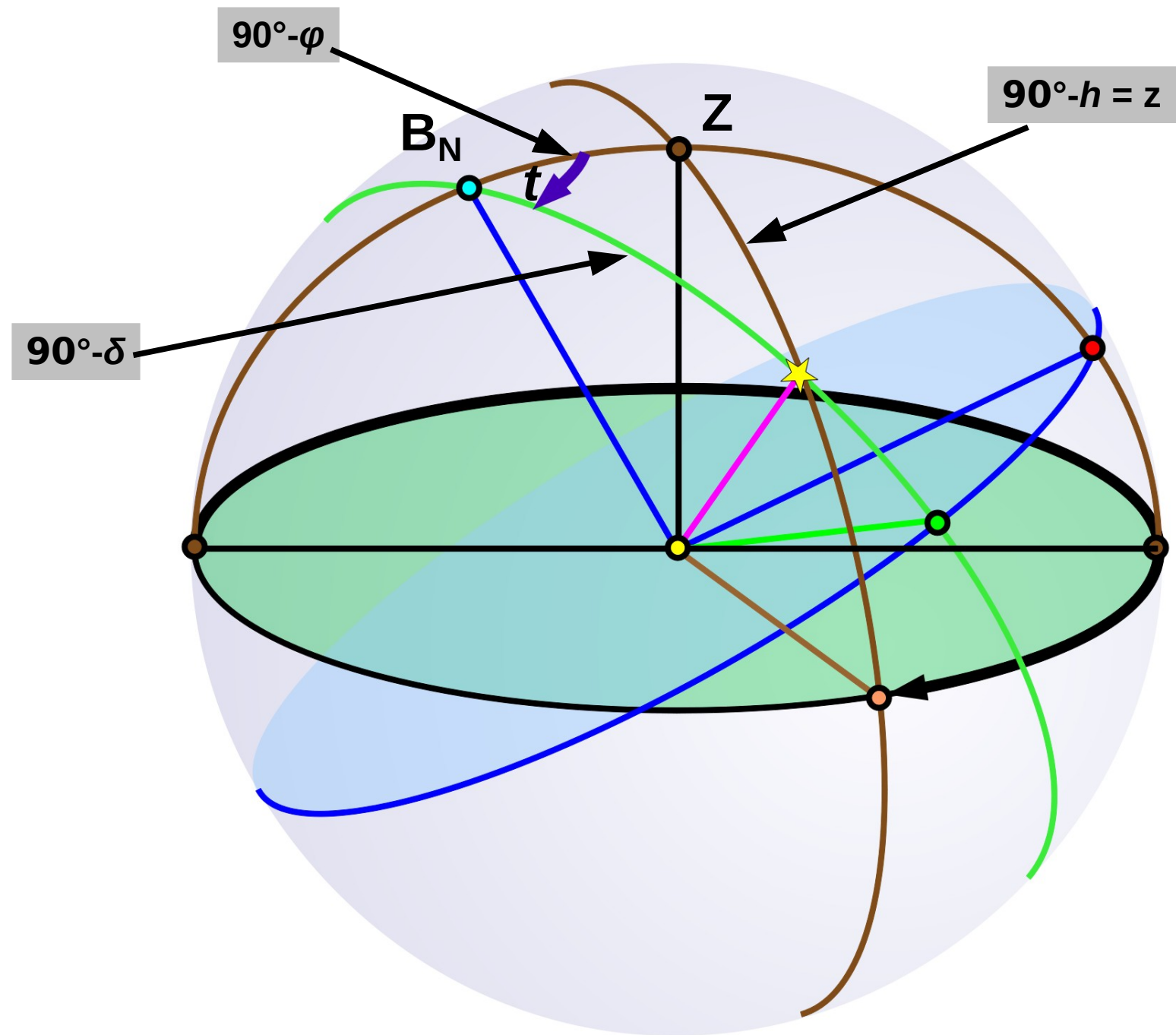


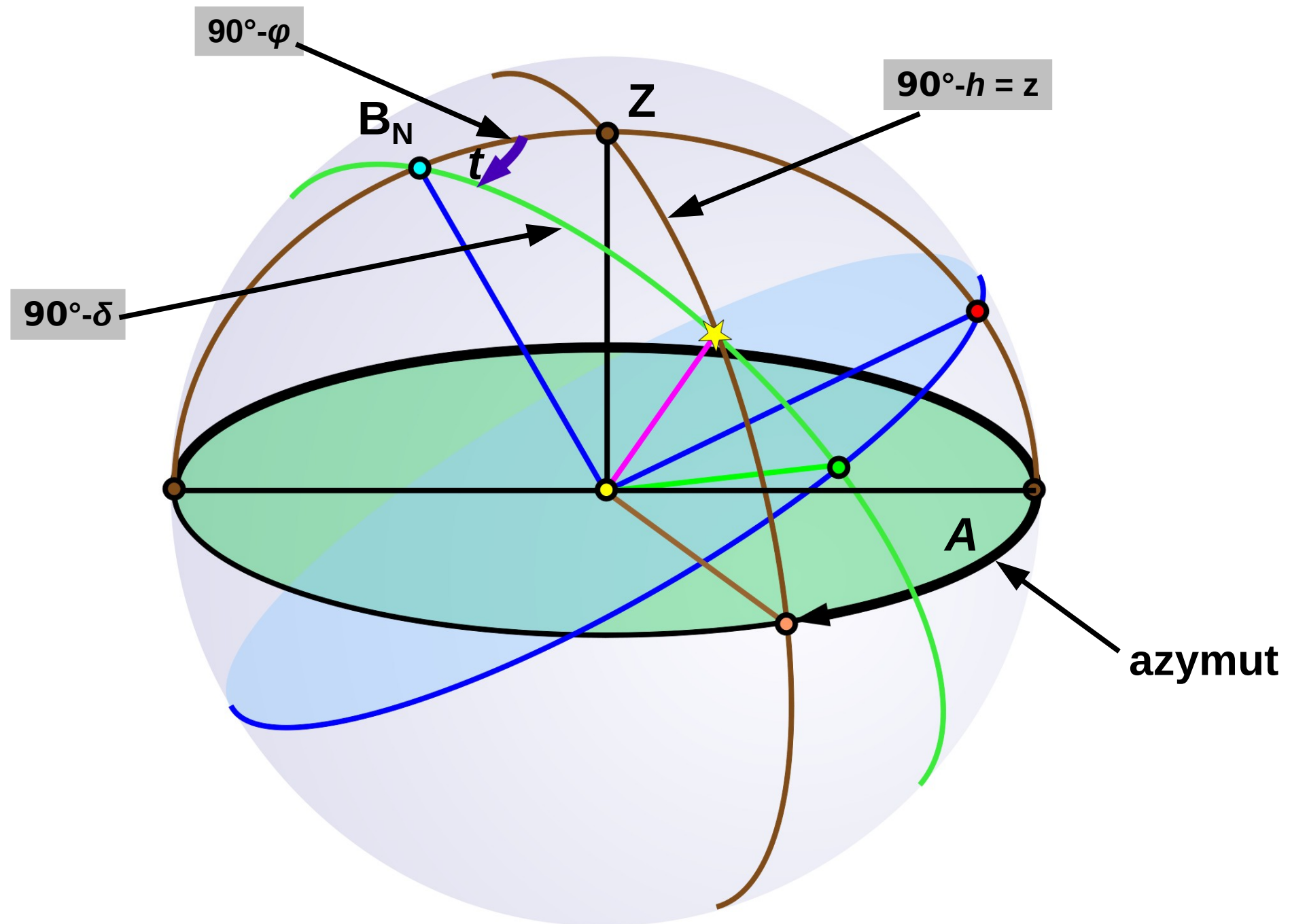


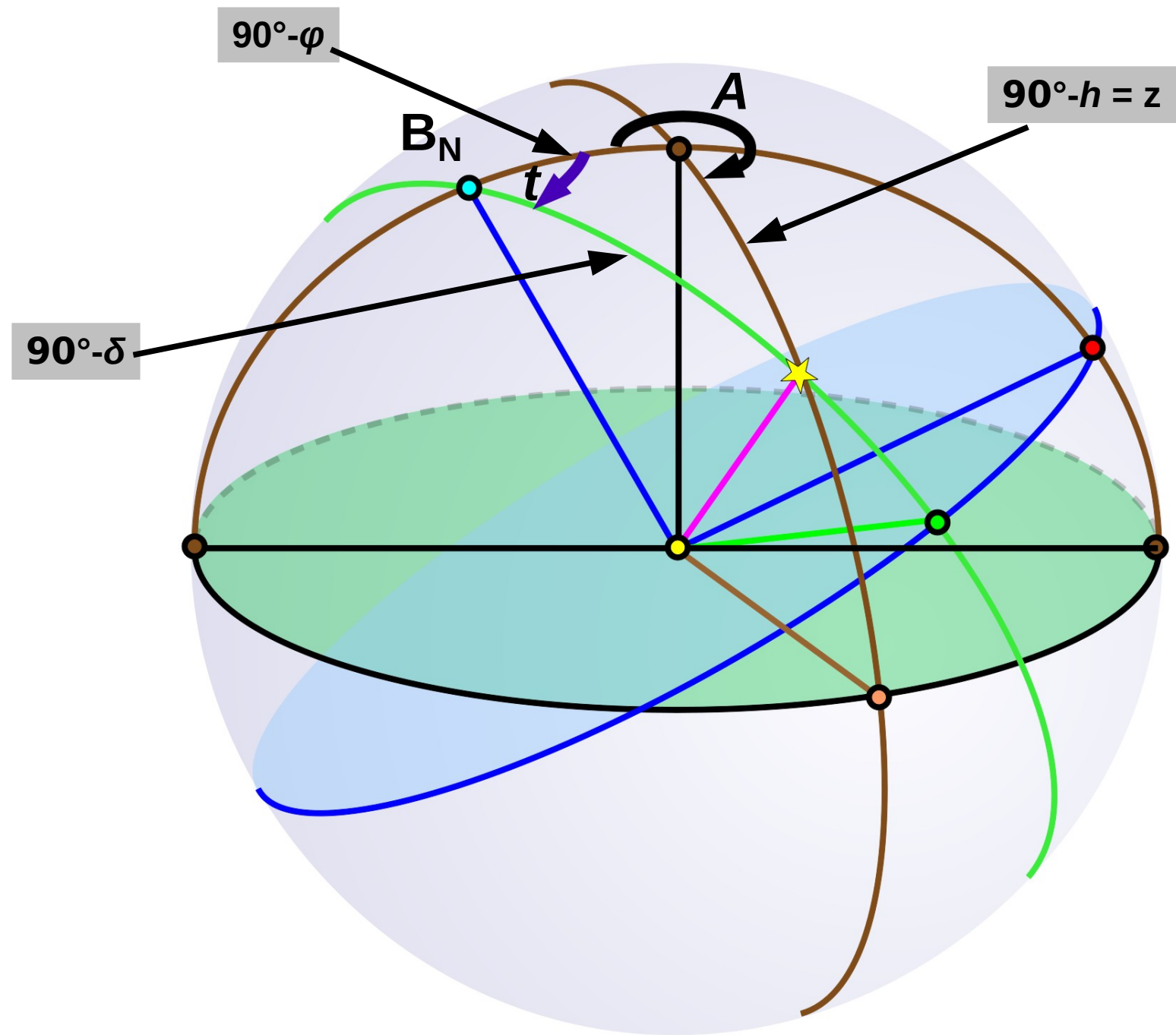


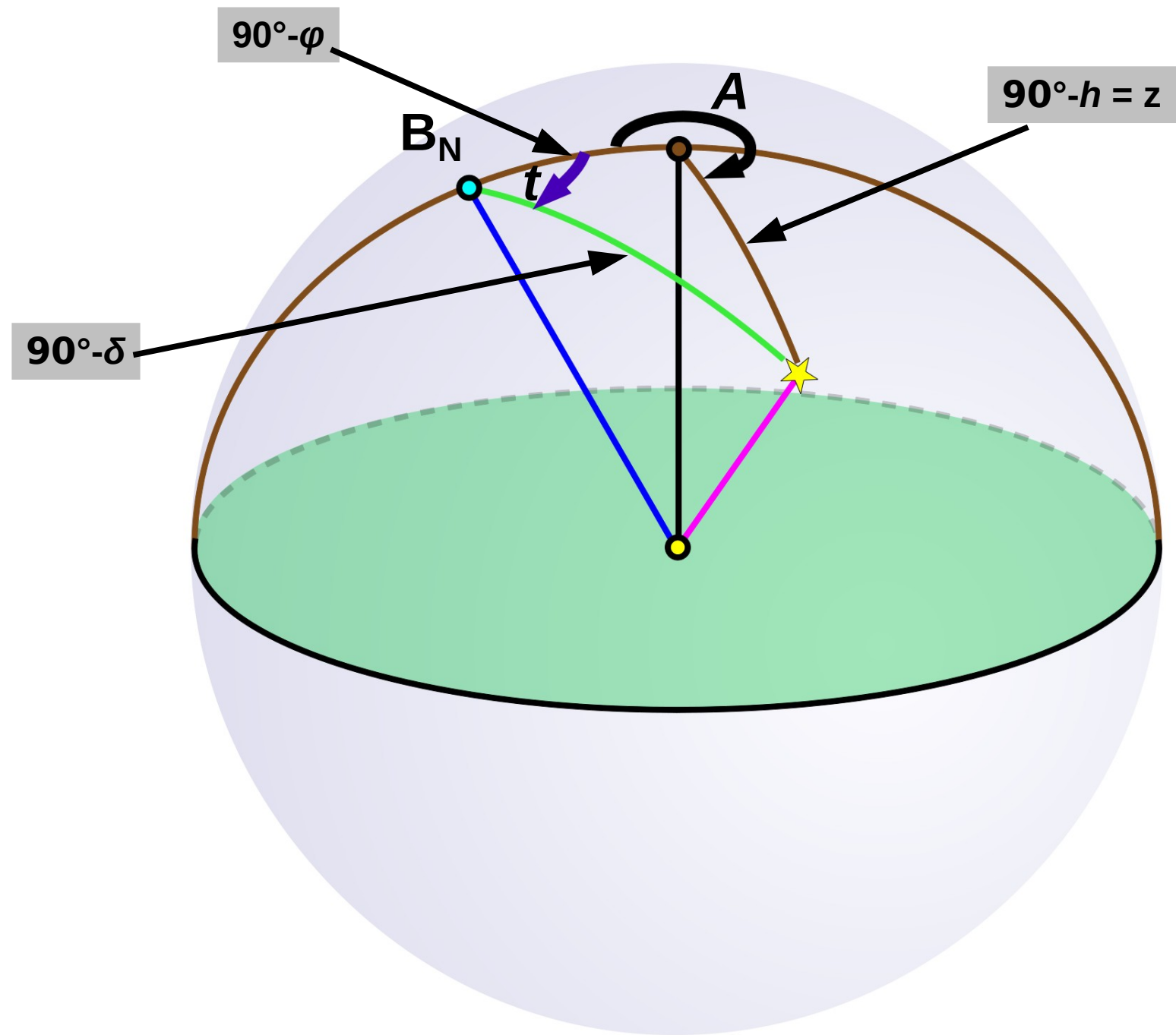


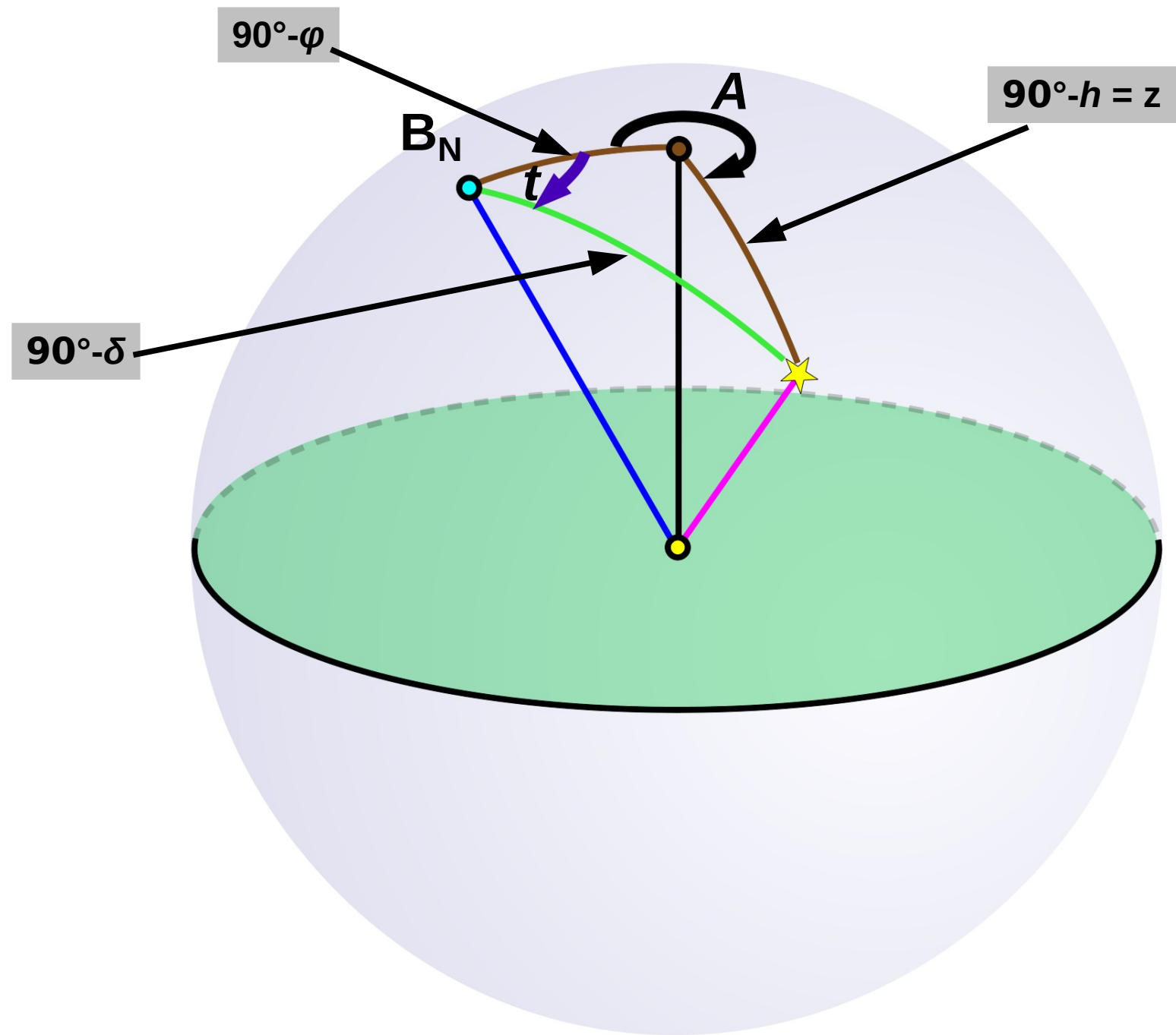


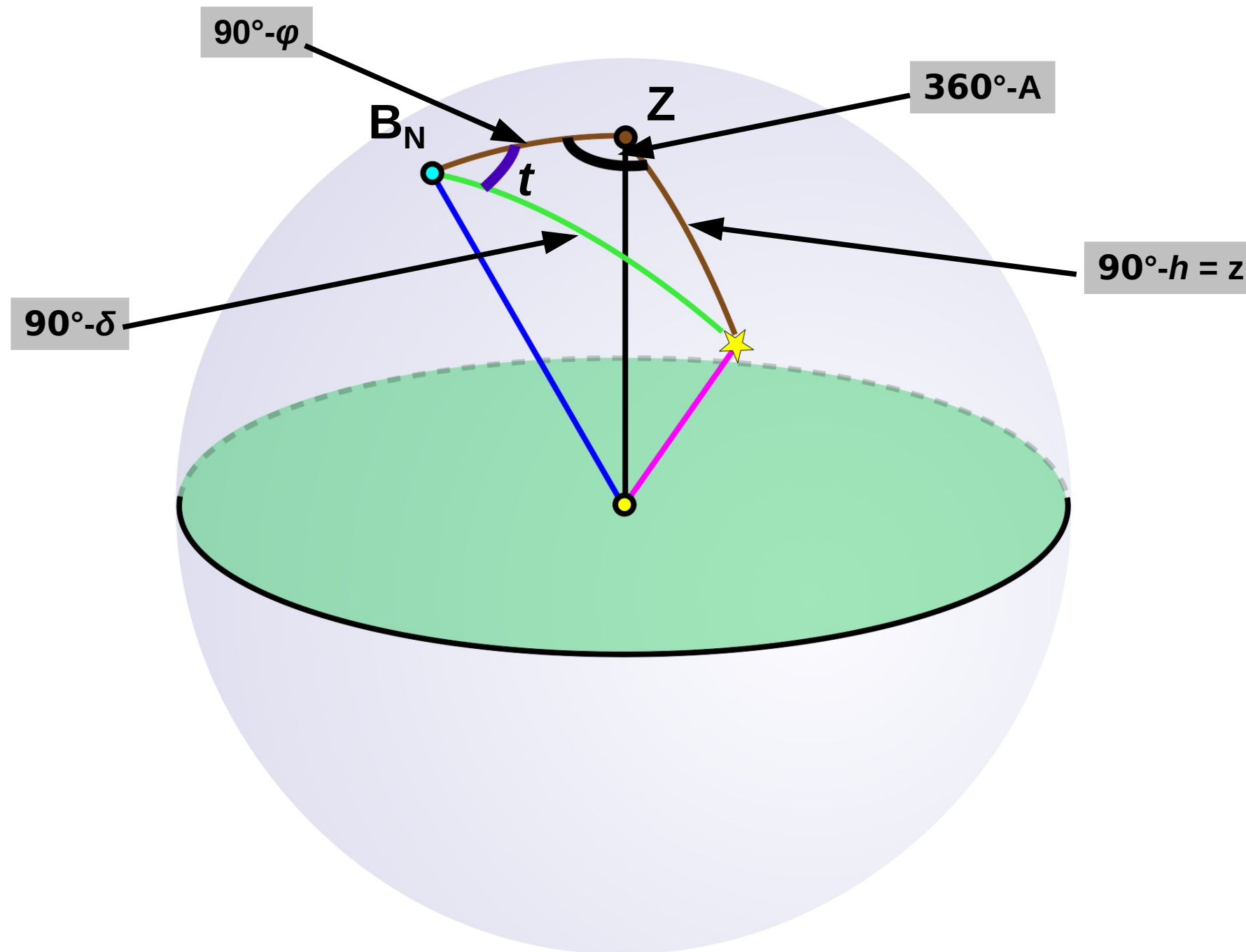


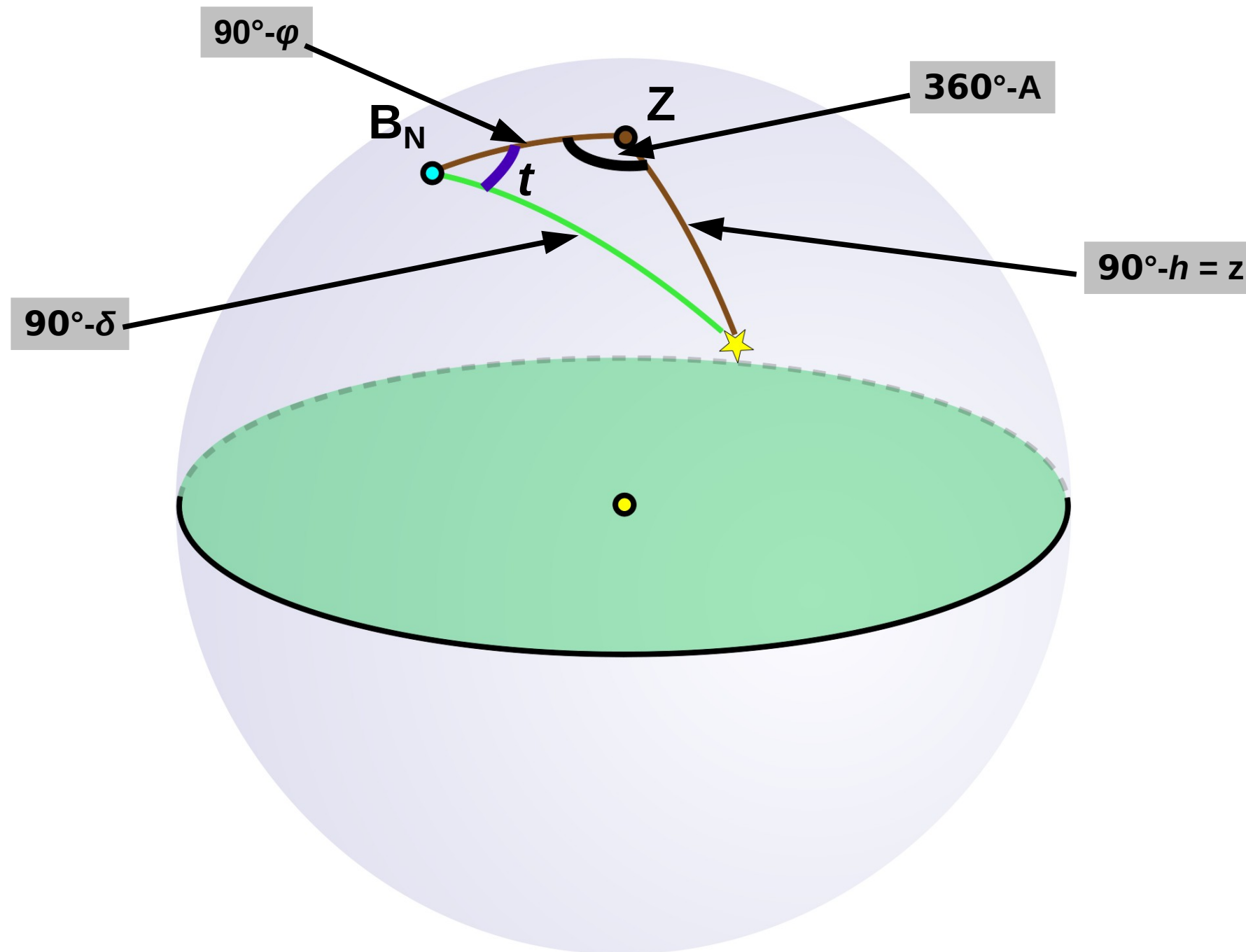


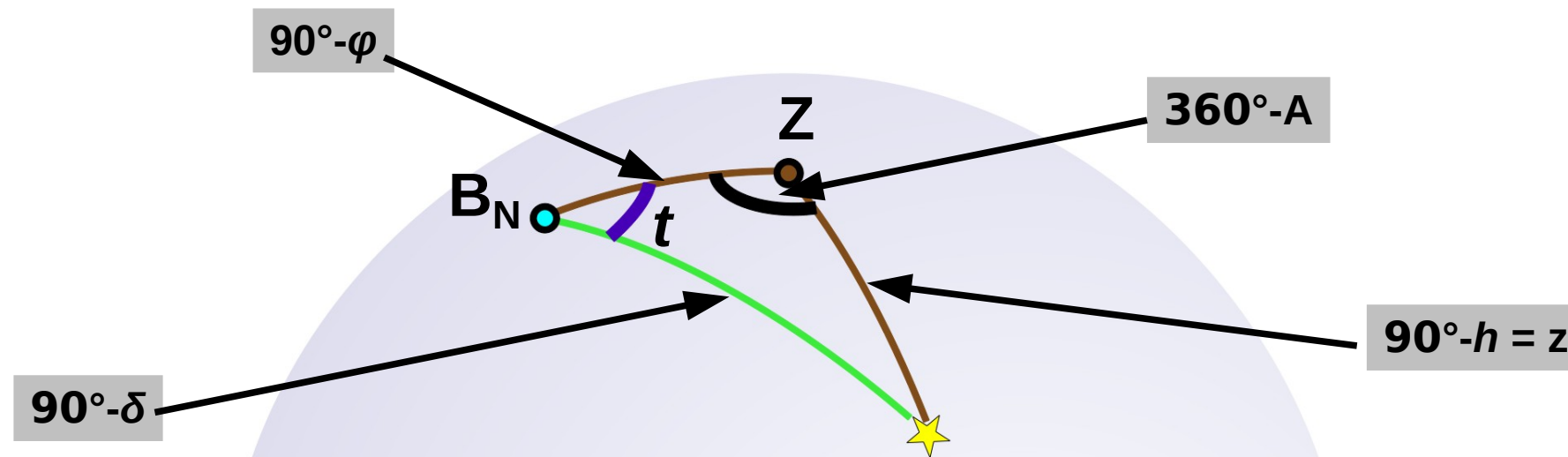






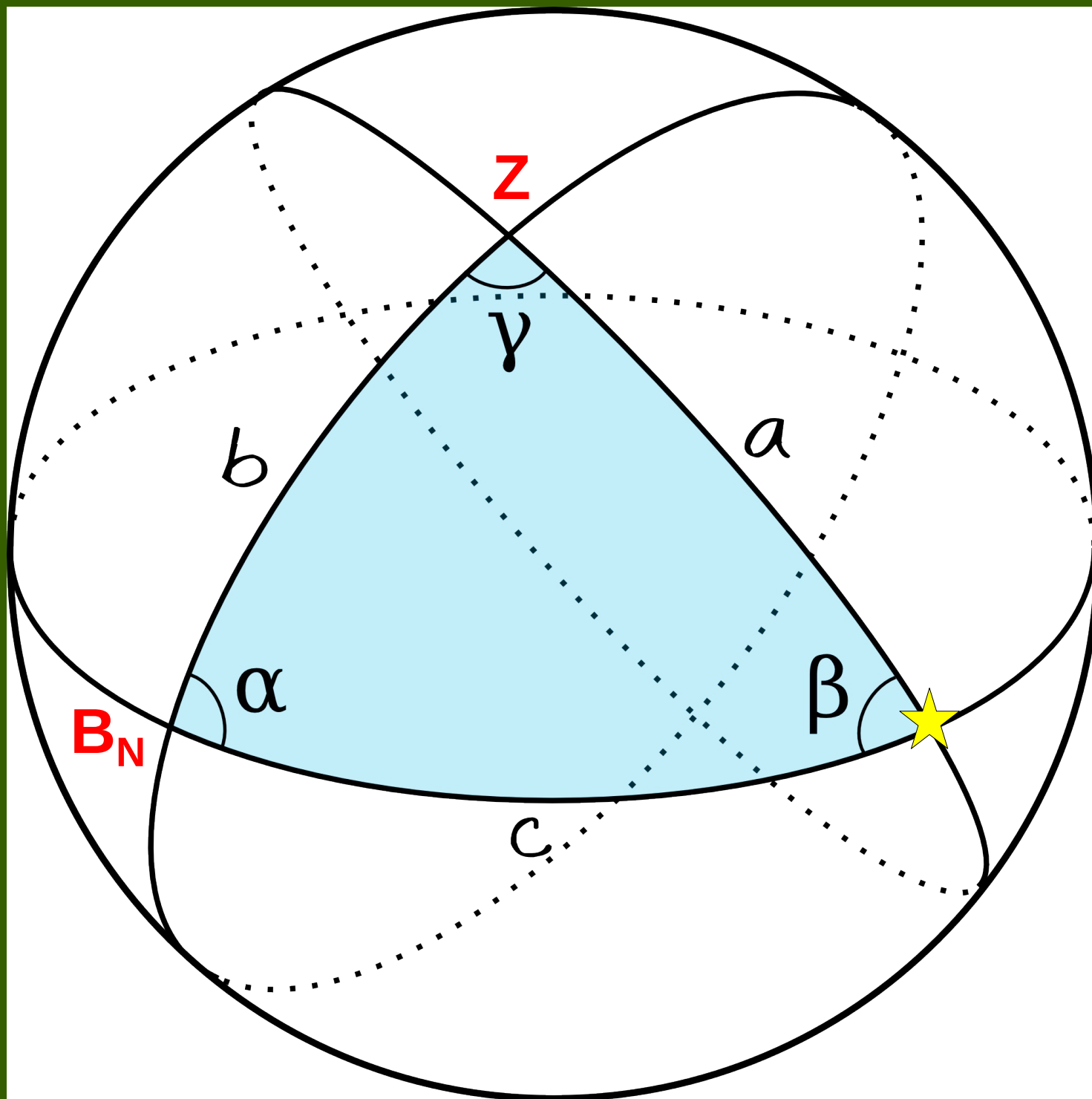




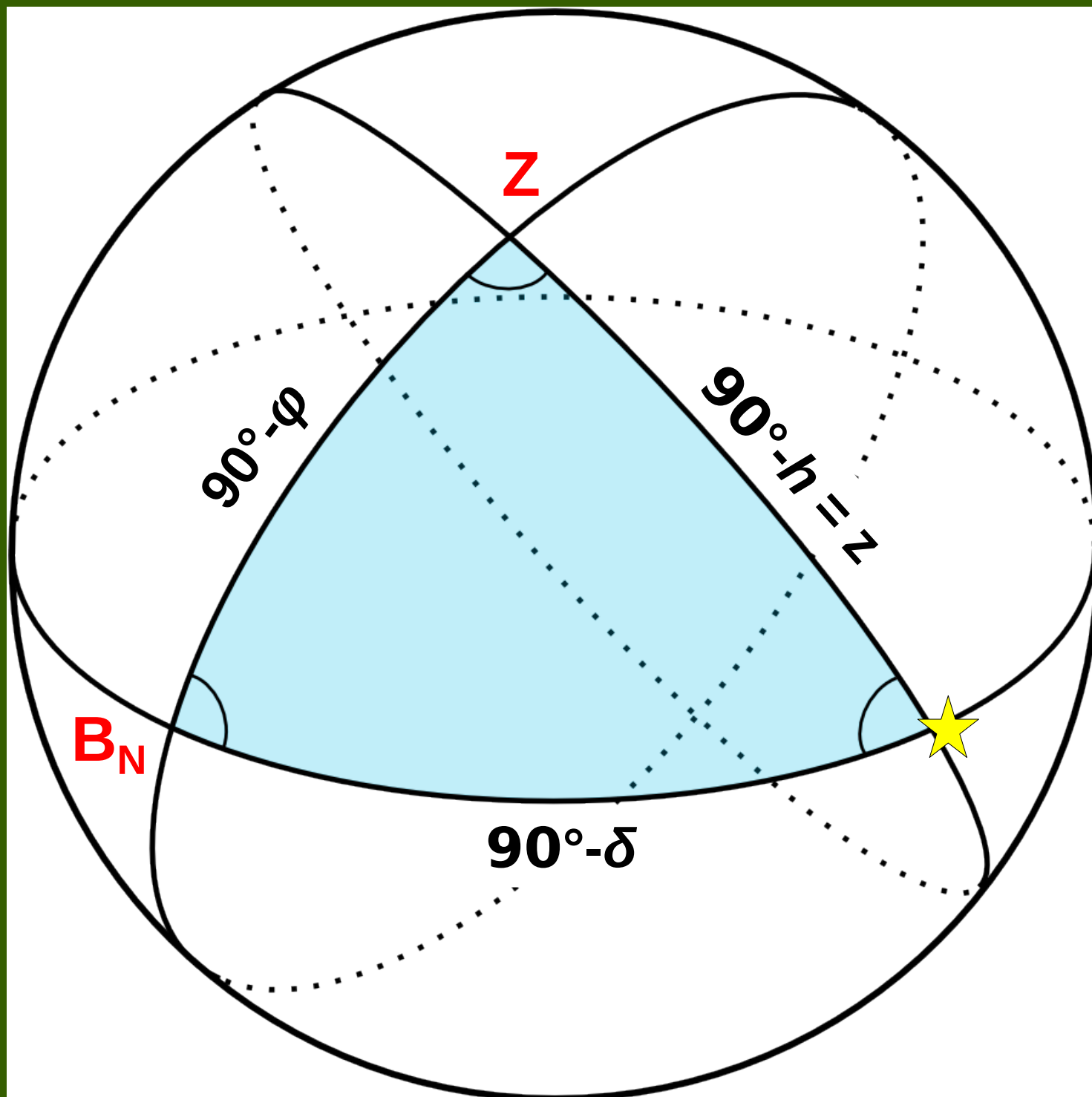


Trójkąt paralaktyczny

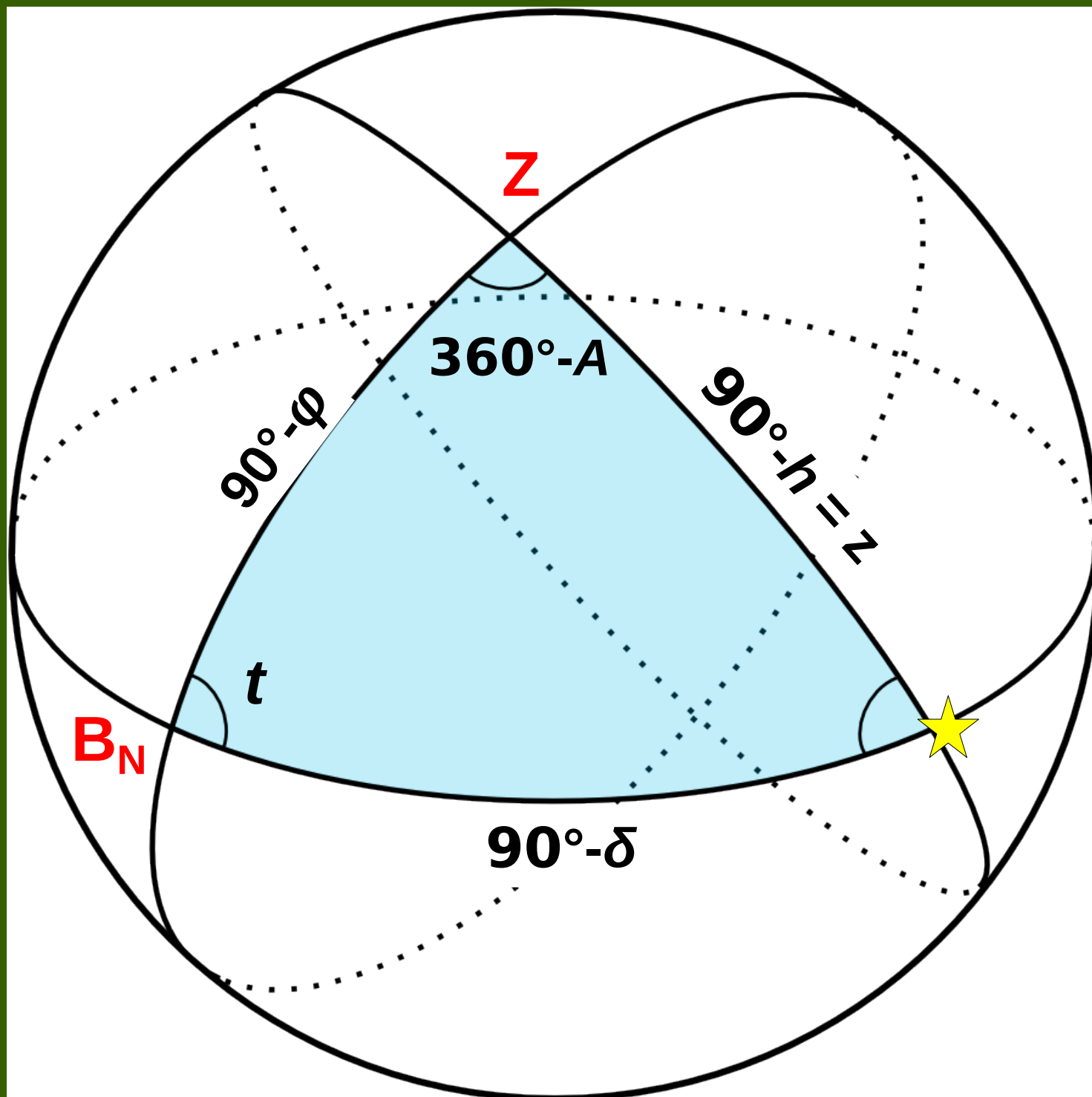
czyli związek między układem równikowym godzinny
a układem horyzontalnym



**Trójkąt
paralaktyczny
wierzchołki**

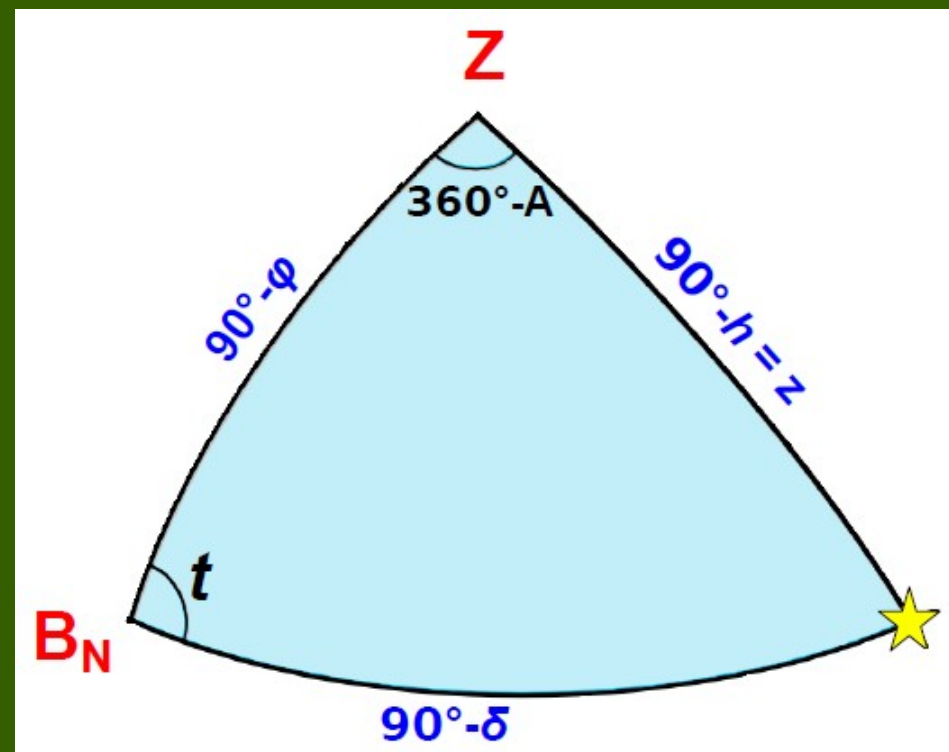


**Trójkąt
paralaktyczny
boki**



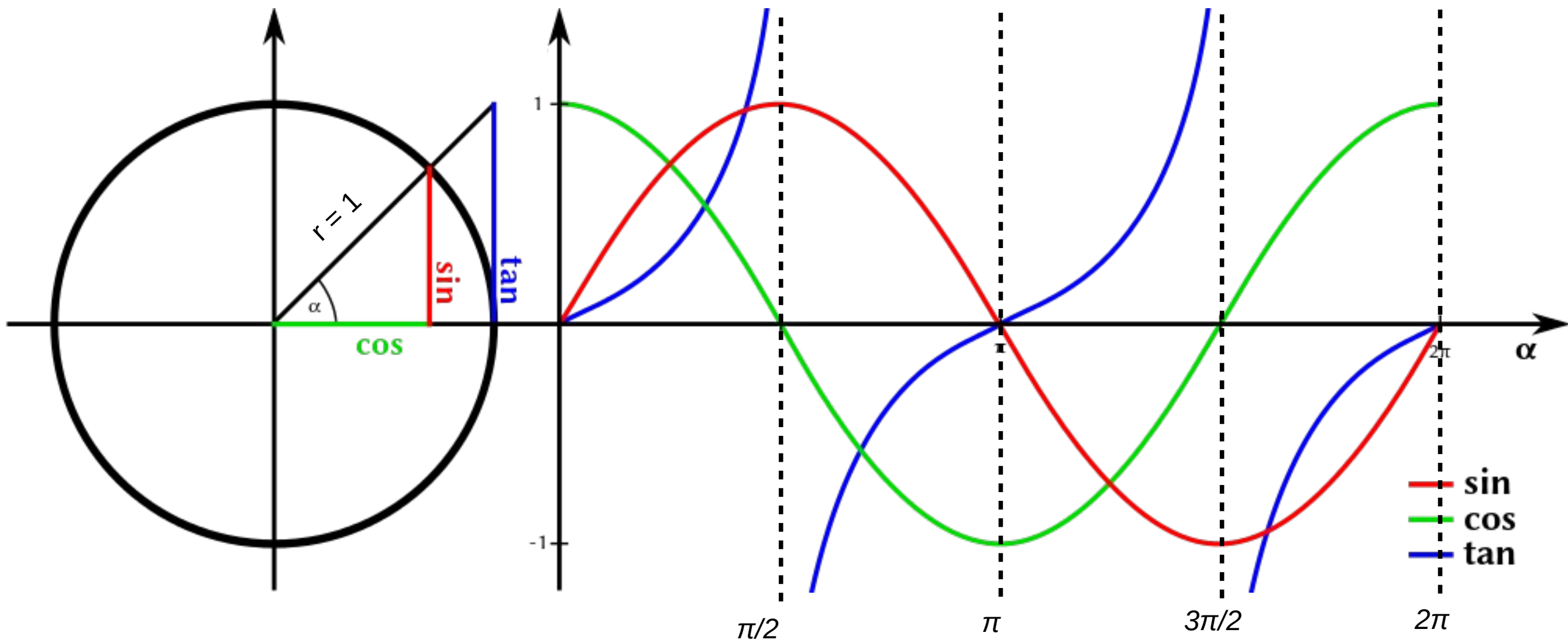
**Trójkąt
paralaktyczny
kąty**

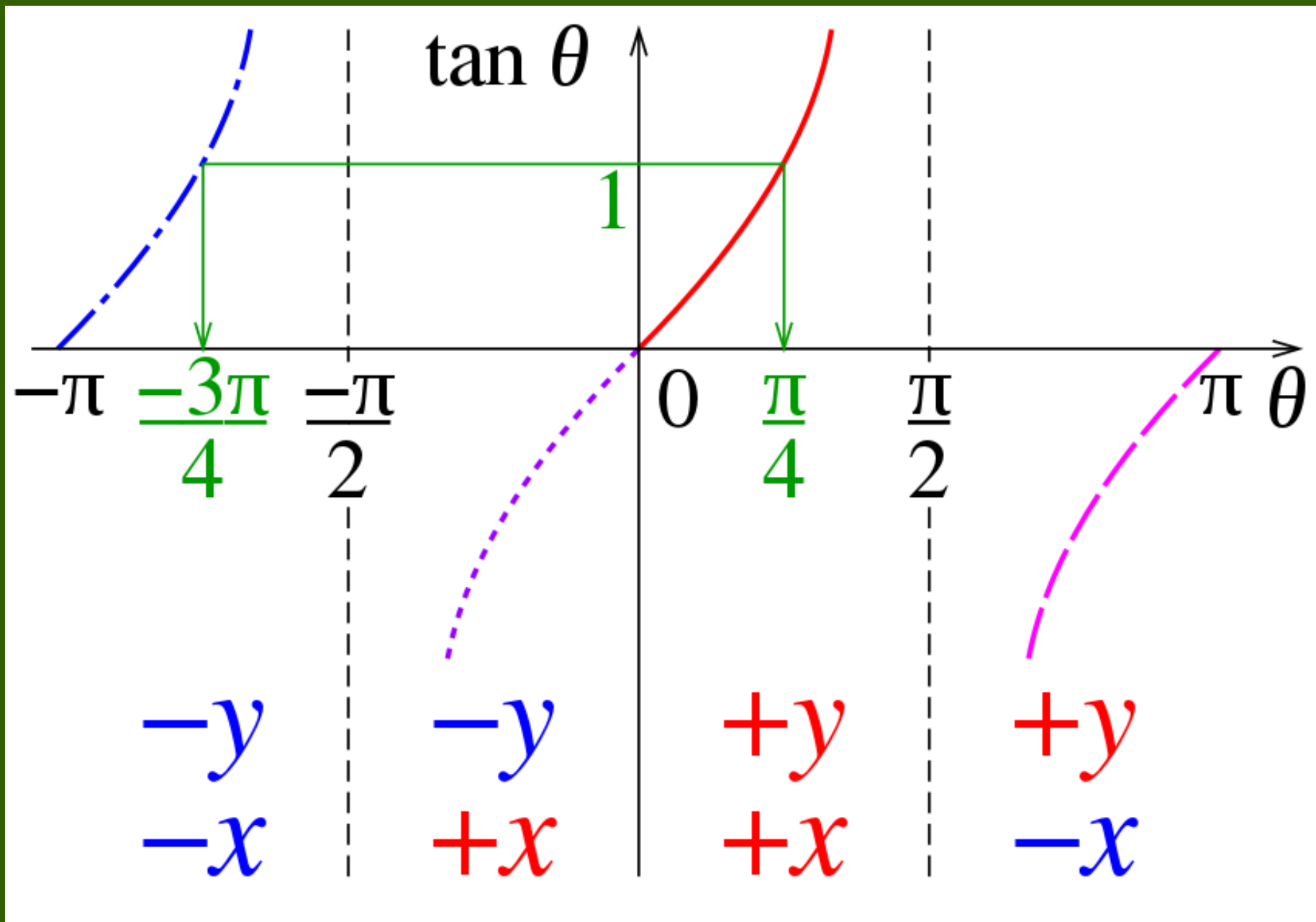
Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym



$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \varphi \sin h + \cos \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \sin h - \sin \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \sin t &= -\cos h \sin A\end{aligned}$$

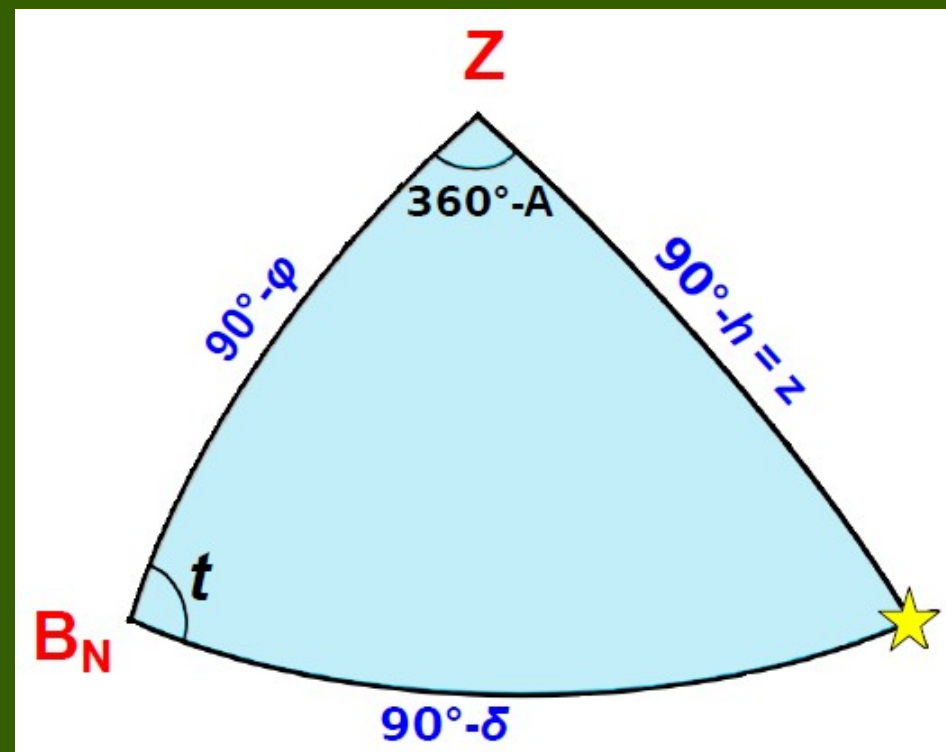
Uwaga! U nas azymut od północy! Podpowiedź: $\sin(180+\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$





$\theta = \text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(z \cdot \sin \theta, z \cdot \cos \theta)$,
 z – dowolna stała dodatnia

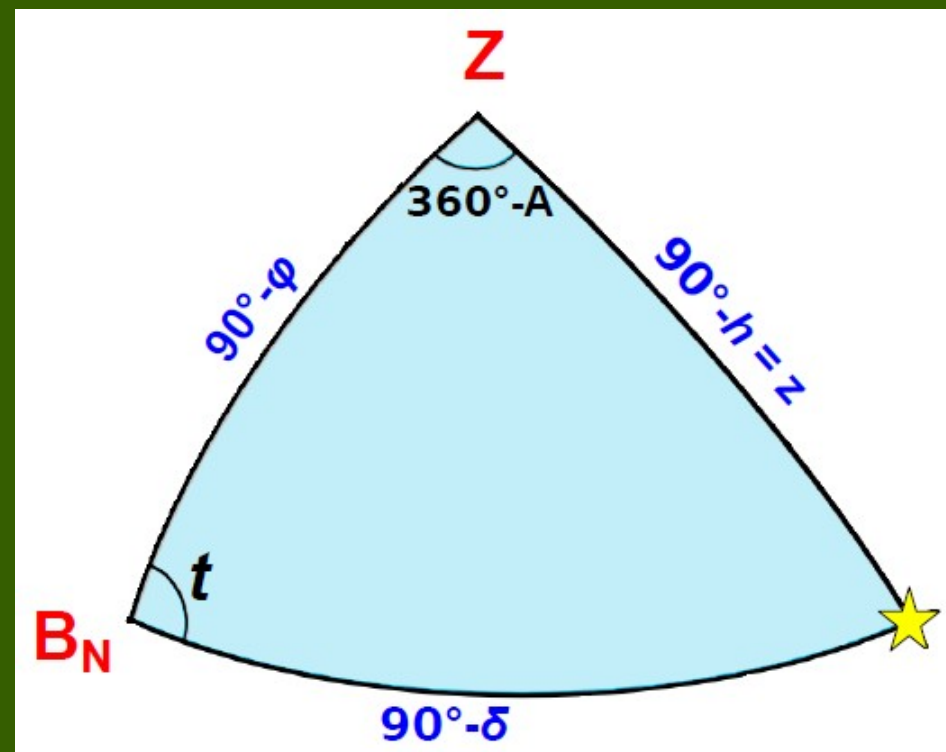
Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym



$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \varphi \sin h + \cos \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \sin h - \sin \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \sin t &= -\cos h \sin A\end{aligned}$$

Uwaga! U nas azymut od północy! Podpowiedź: $\sin(180+\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$

Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym



$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ \cos h \cos A &= \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t \\ \cos h \sin A &= -\cos \delta \sin t\end{aligned}$$

Uwaga! U nas azymut od północy! Podpowiedź: $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$

Jeżeli przez $r_{\alpha,\beta}$ oznaczmy wektor, którego składowe x , y i z wyliczamy ze wzorów:

$$x = \cos \alpha \cos \beta$$

$$y = \sin \alpha \cos \beta$$

$$z = \sin \beta$$

to po transformacjach opisanych na kolejnych slajdach współrzędne kątowe wyliczymy ze wzorów:

$$\beta = \arcsin z$$

$$\alpha = \operatorname{atan2}(y / x)$$

$\theta = \operatorname{atan2}(z \cdot \sin \theta, z \cdot \cos \theta)$, z – dowolna stała dodatnia
a $\cos \beta$ jest zawsze dodatni bo $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$

Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym

Przez $r_{\alpha,\beta}$ oznaczamy wersor, którego składowe x , y i z wyliczymy ze wzorów:

$$x = \cos \alpha \cos \beta$$

$$y = \sin \alpha \cos \beta$$

$$z = \sin \beta$$

Operatory obrotu:

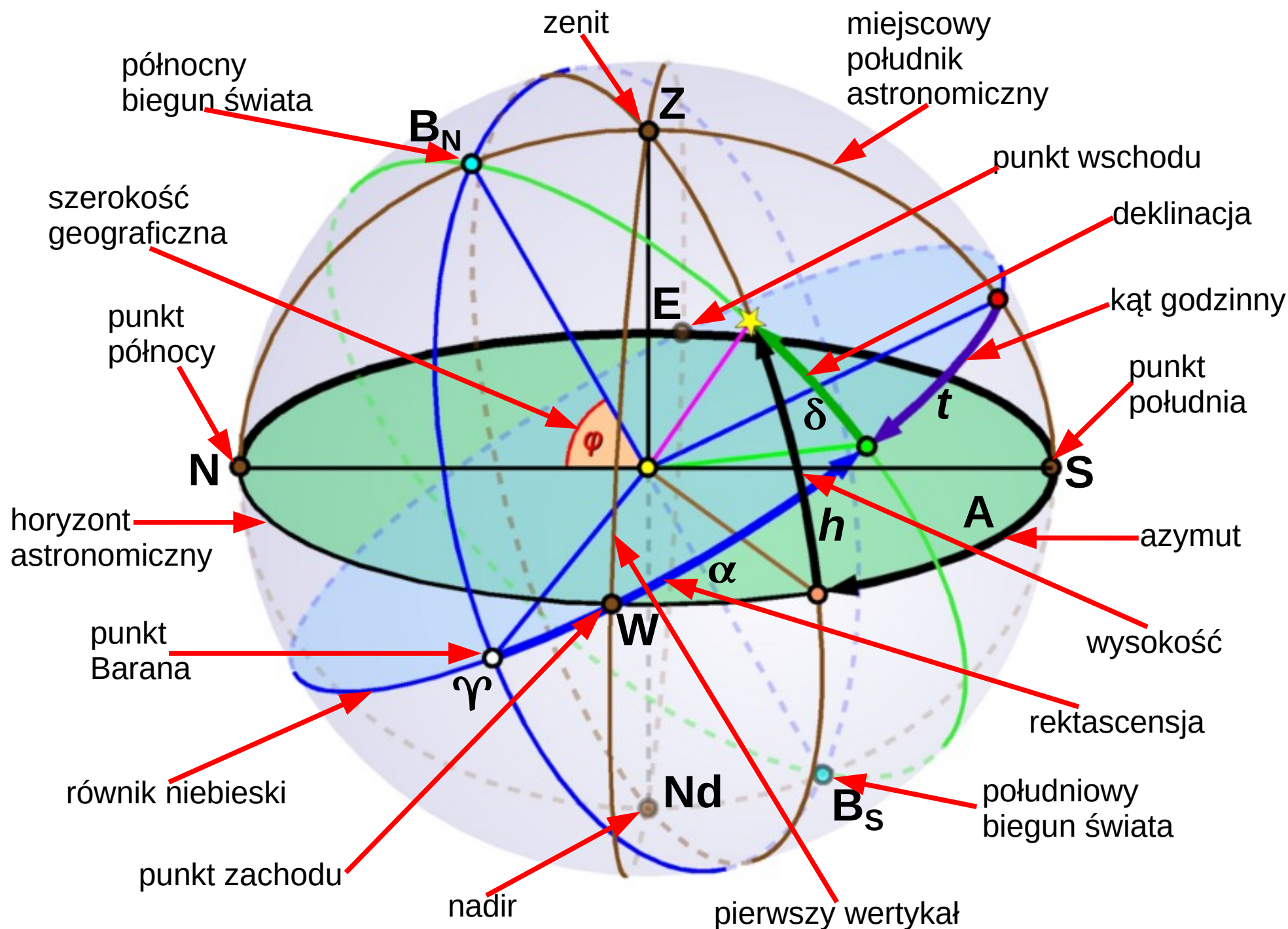
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

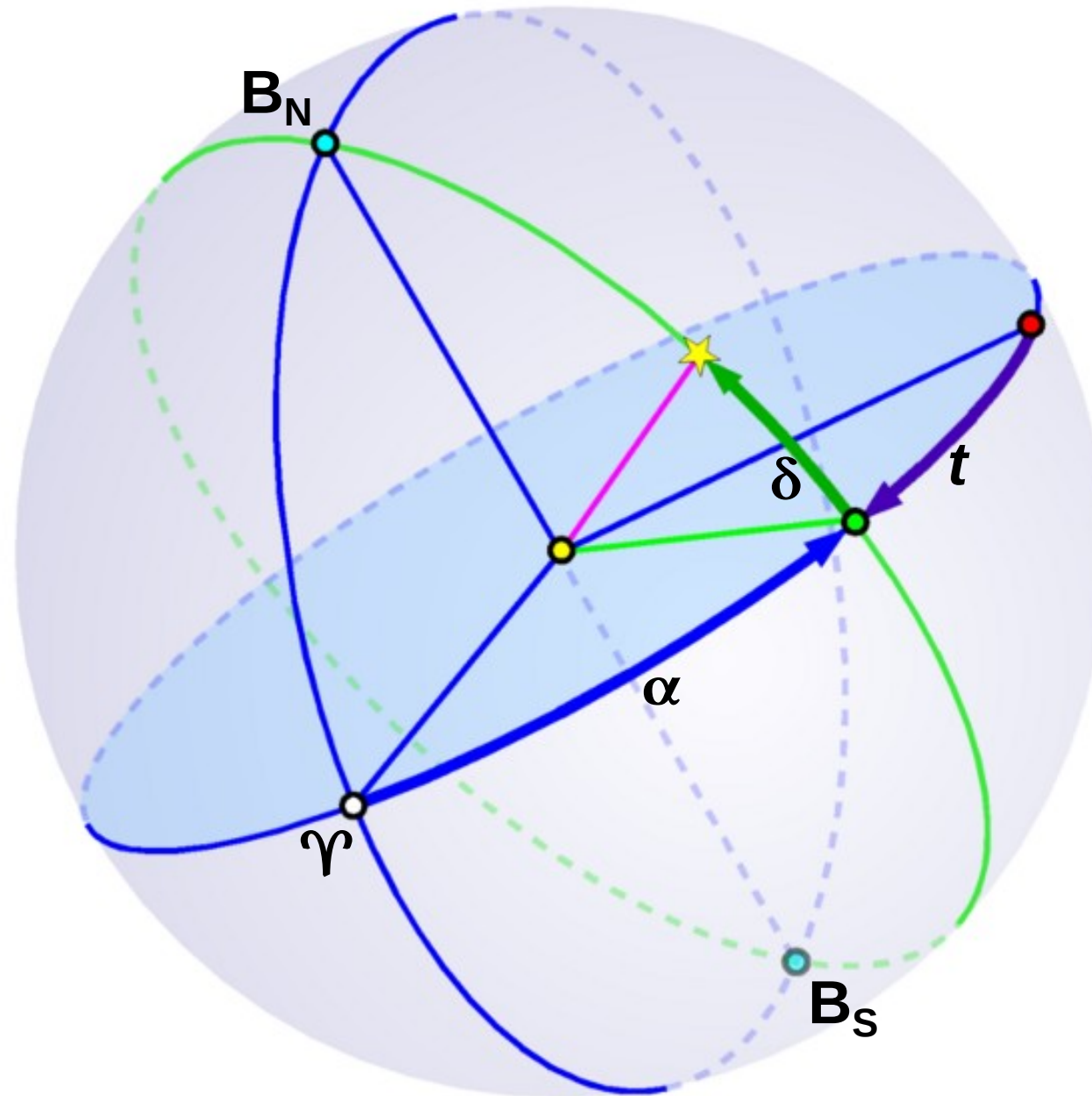
$$r_{t,\delta} = R_y(\varphi - 90^\circ) R_z(180^\circ) r_{A,h}$$

$$r_{A,h} = R_z(-180^\circ) R_y(90^\circ - \varphi) r_{t,\delta}$$

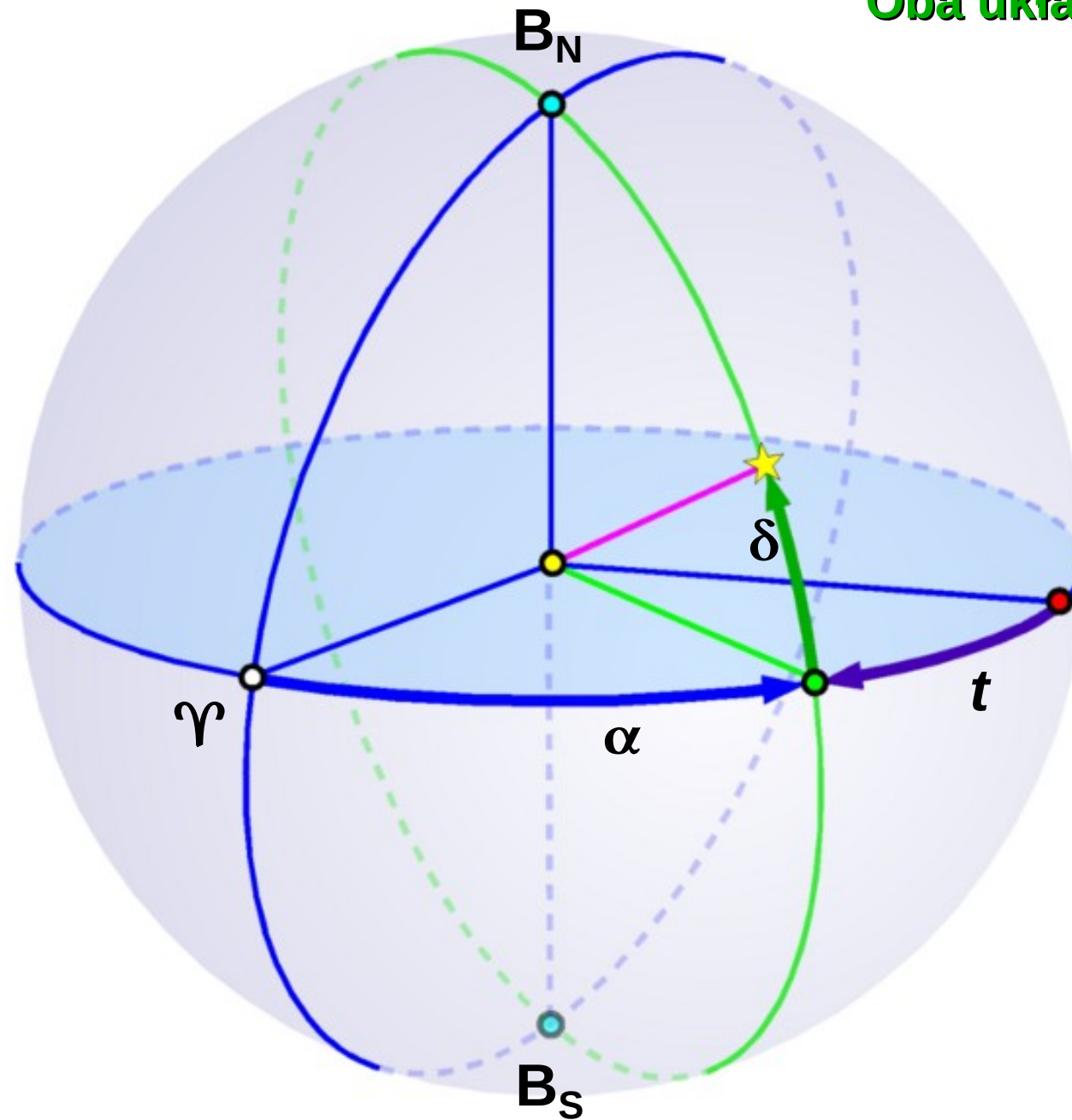


**Oba układy
równikowe
oraz układ
horyzontalny**

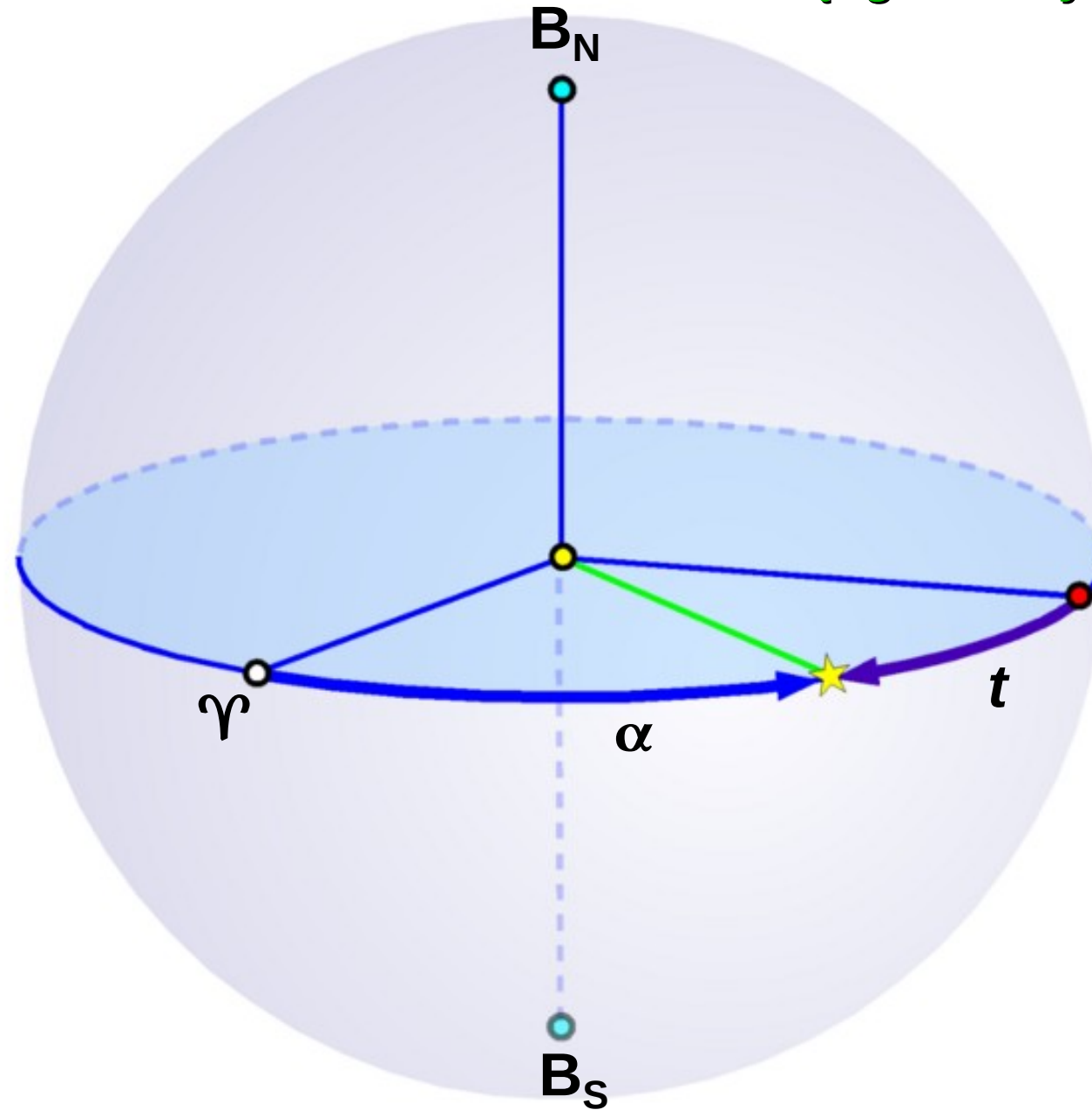
Oba układy równikowe



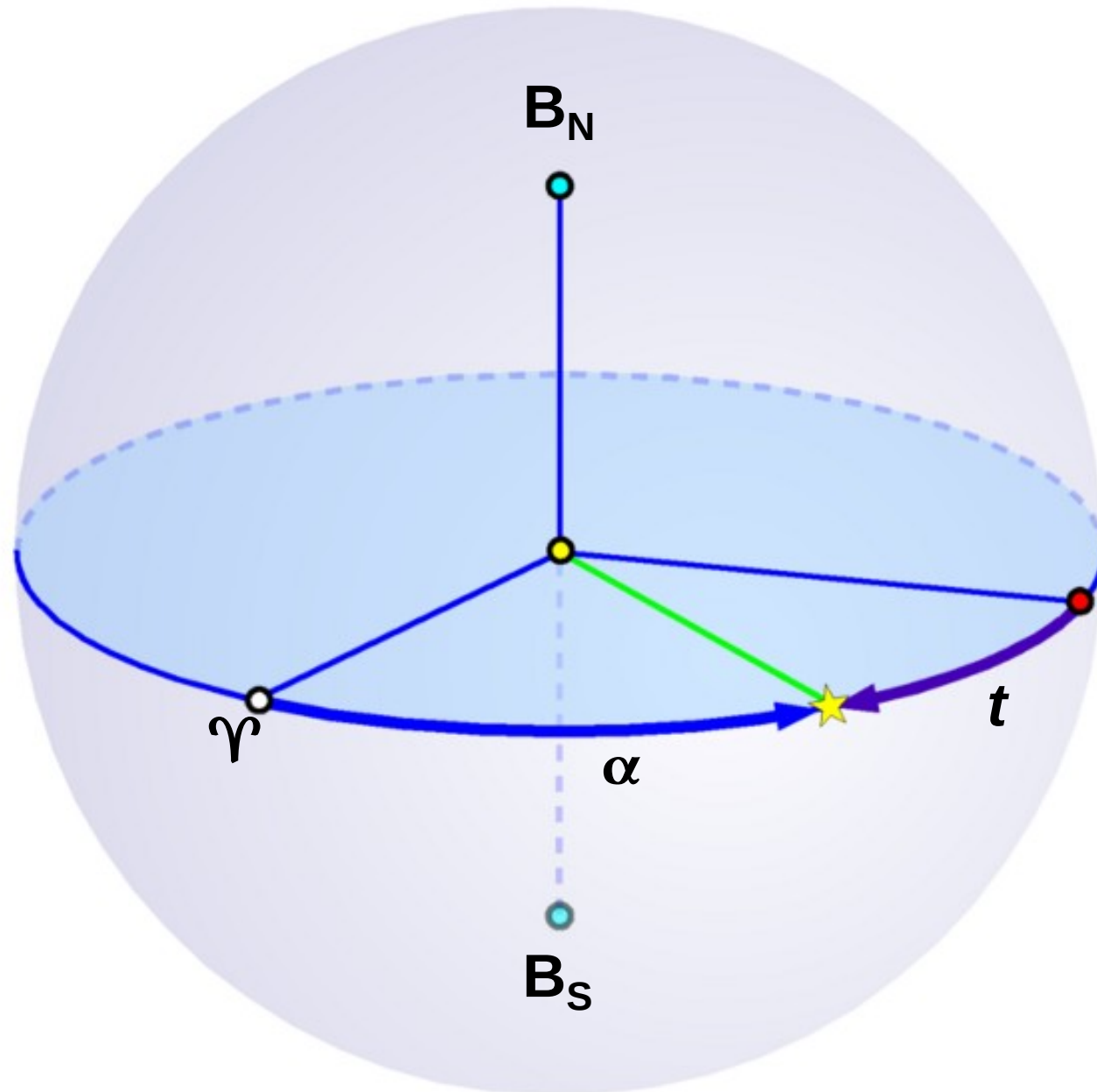
Oba układy równikowe



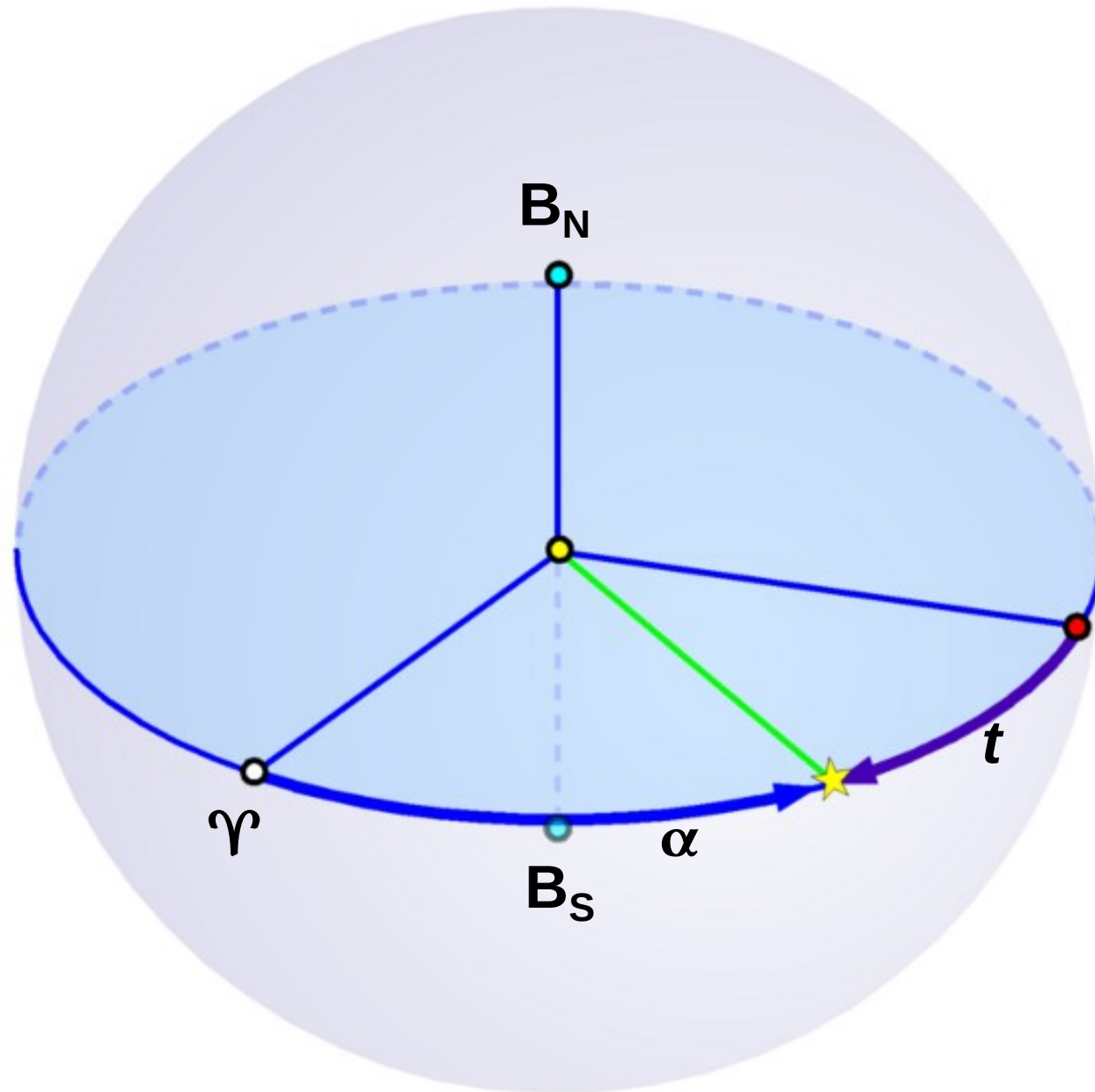
kąt godzinny i rektascensja



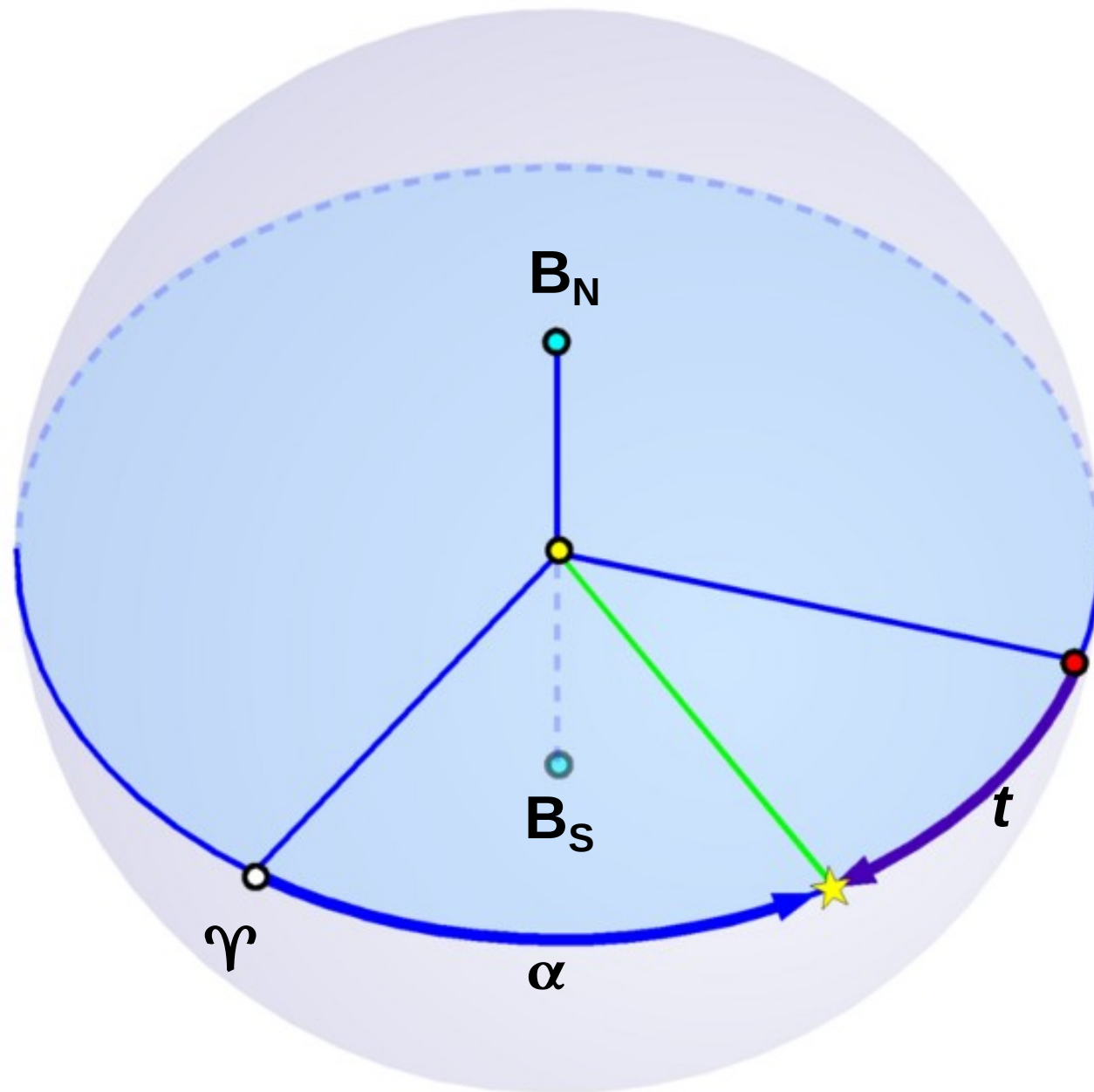
kąt godzinny i rektascensja



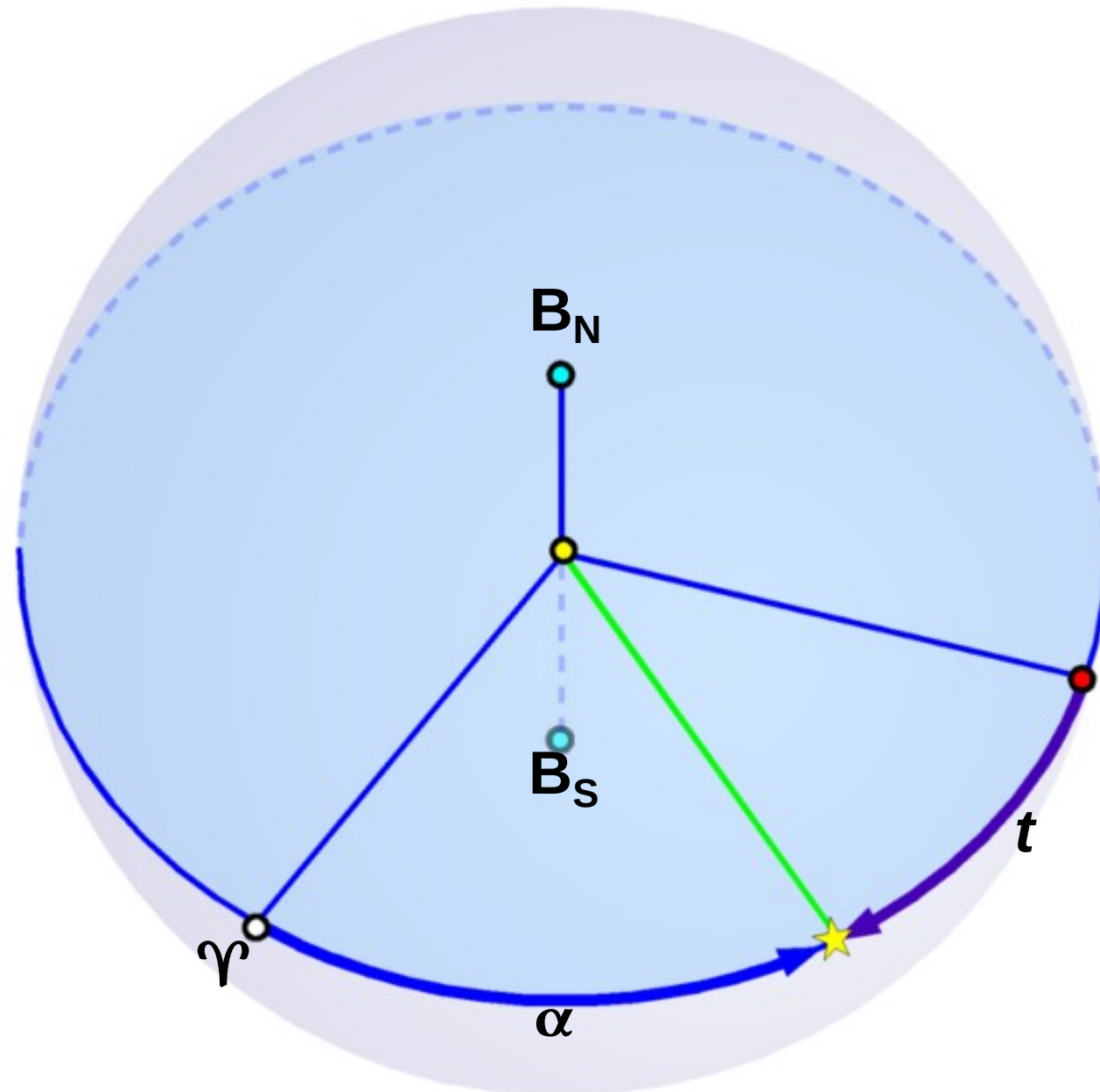
kąt godzinny i rektascensja



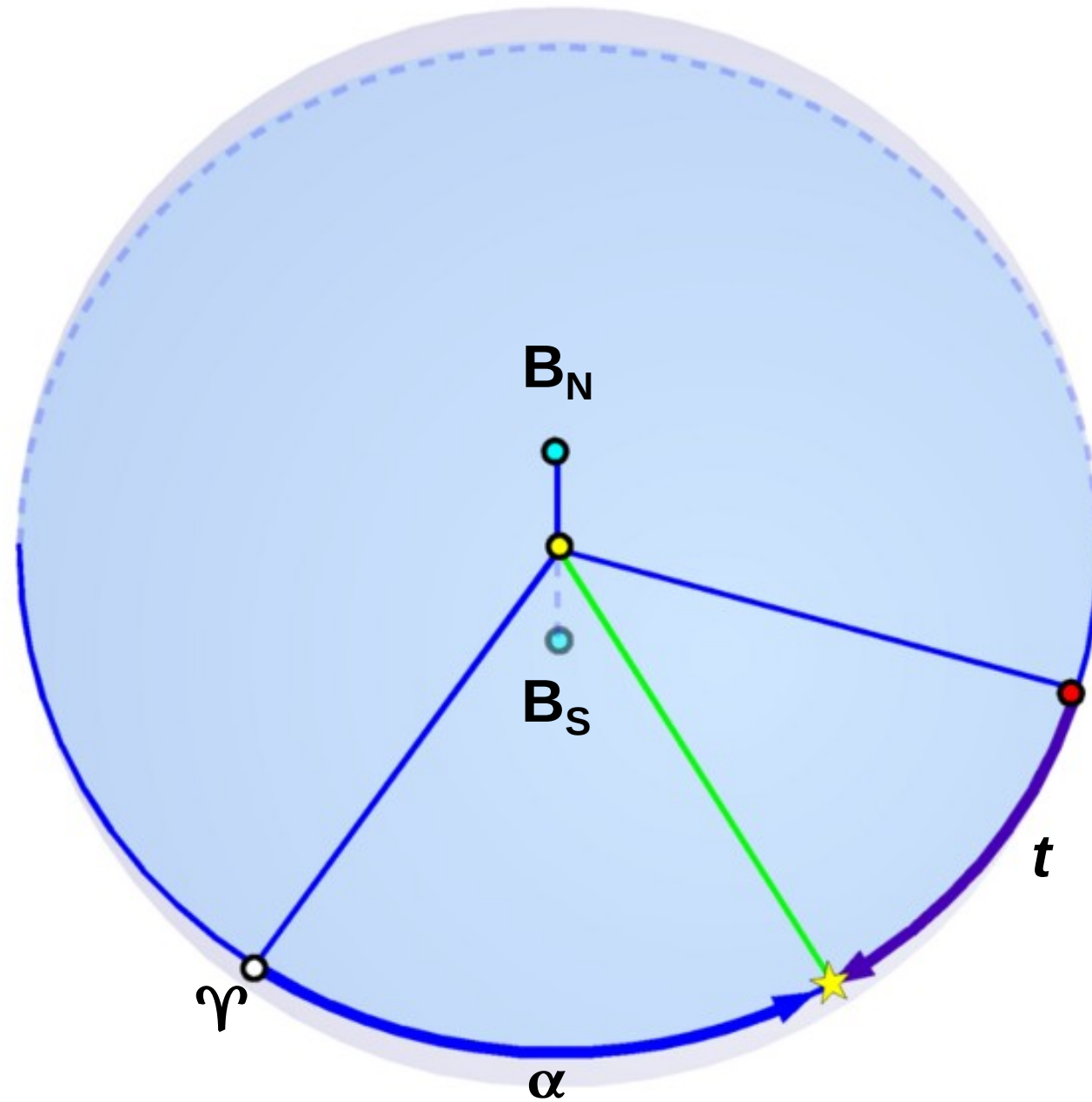
kąt godzinny i rektascensja



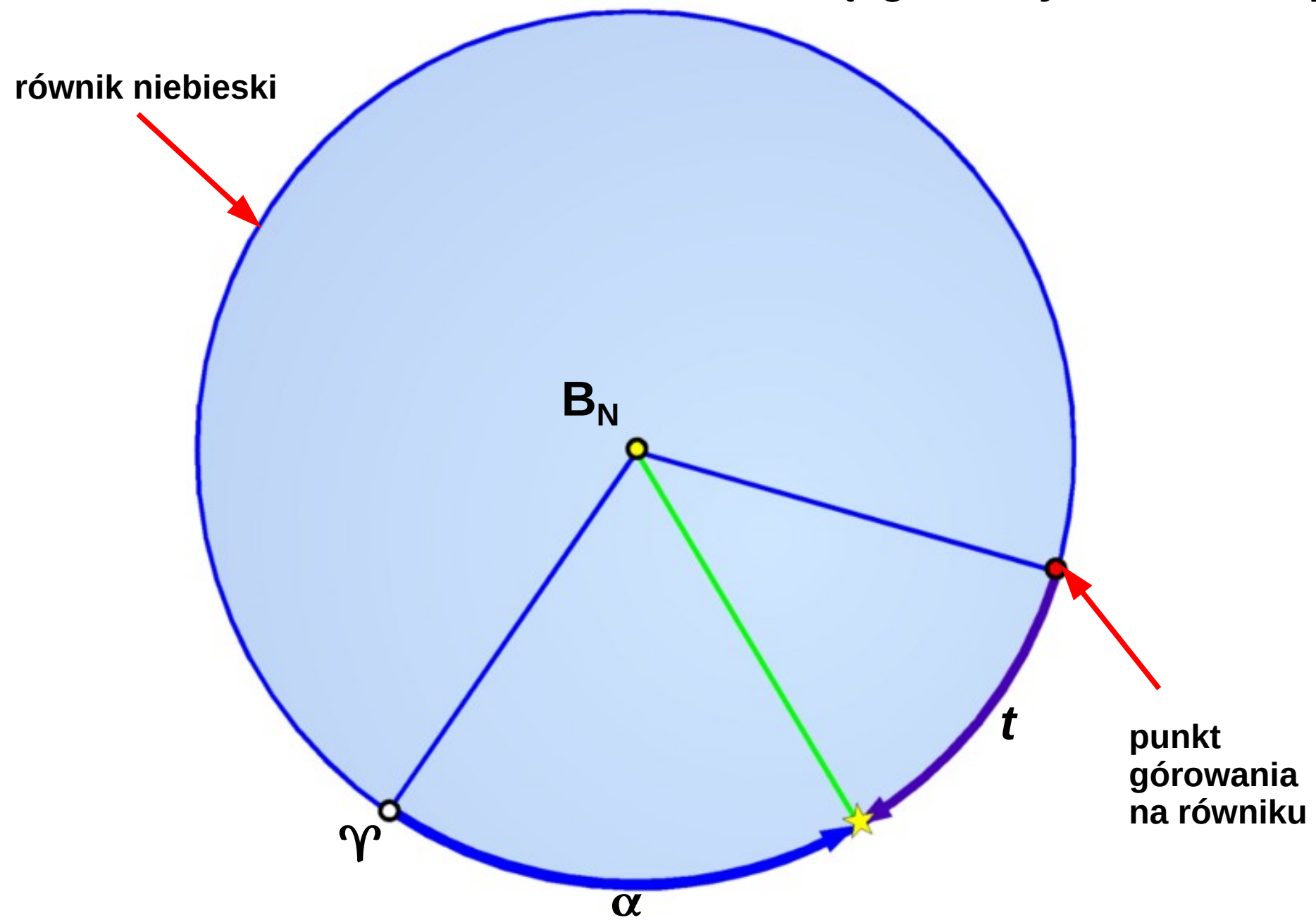
kąt godzinny i rektascensja



kąt godzinny i rektascensja

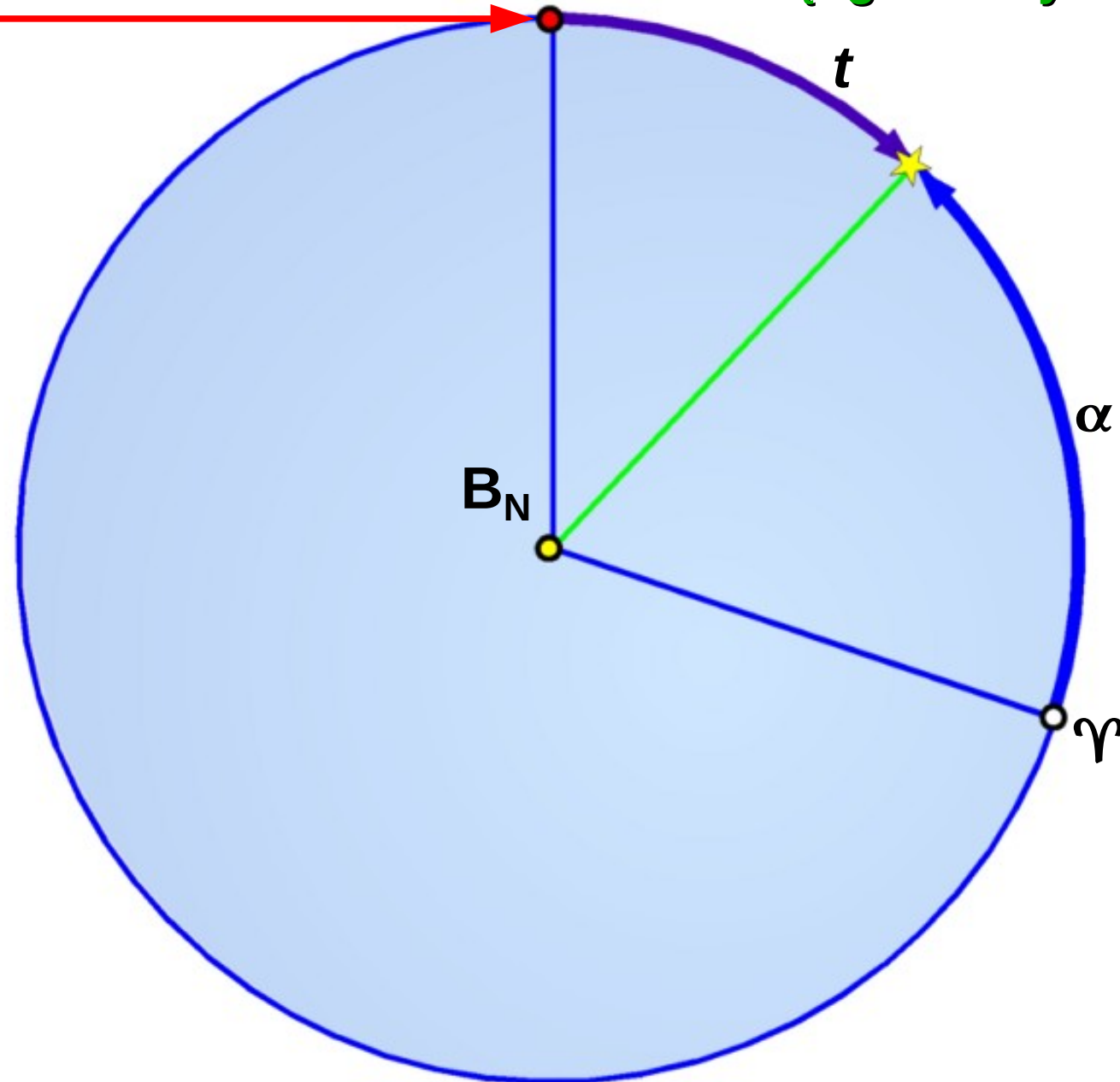


kąt godzinny i rektascensja



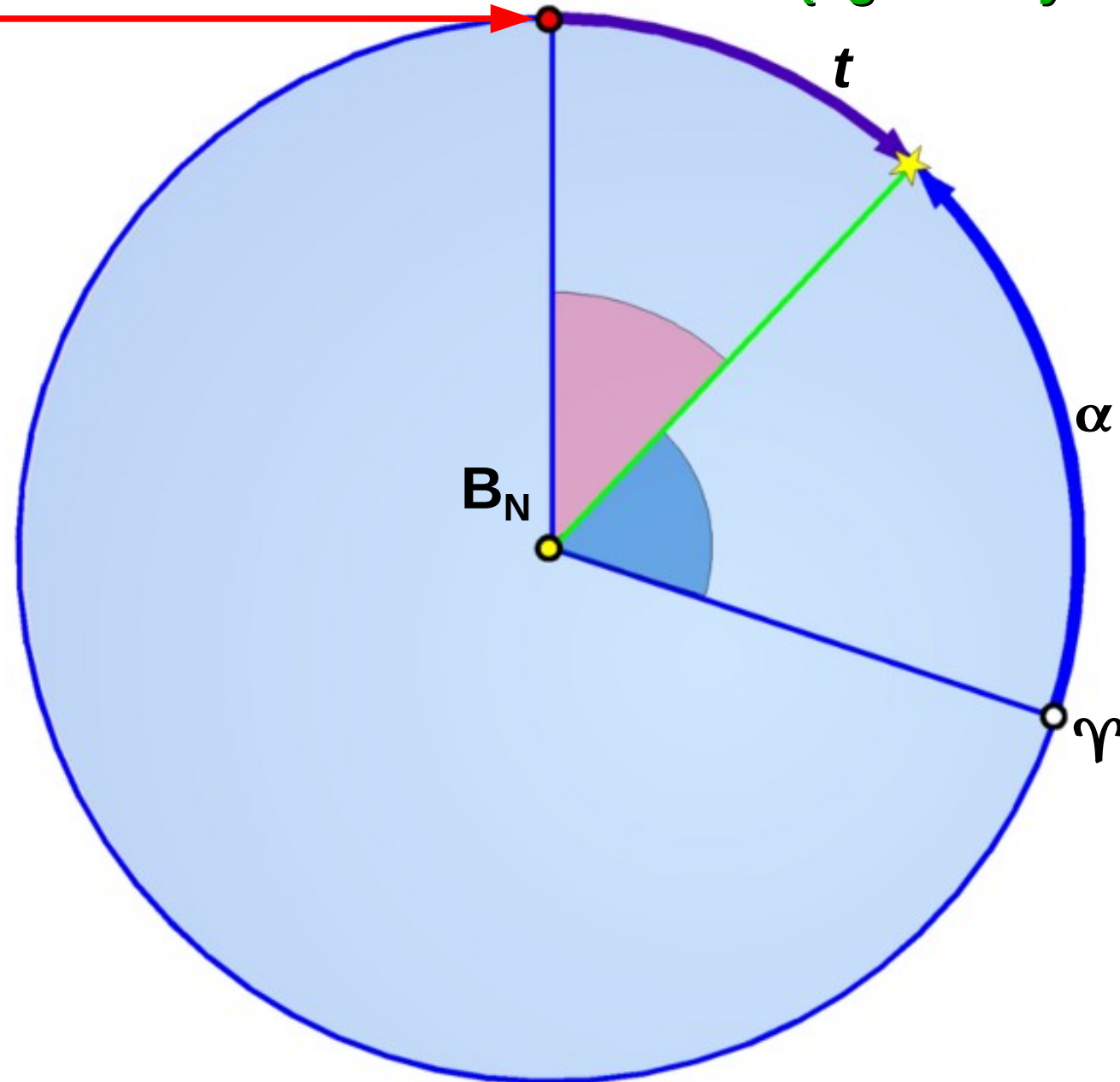
punkt
górowania
na równiku

kąt godzinny i rektascensja



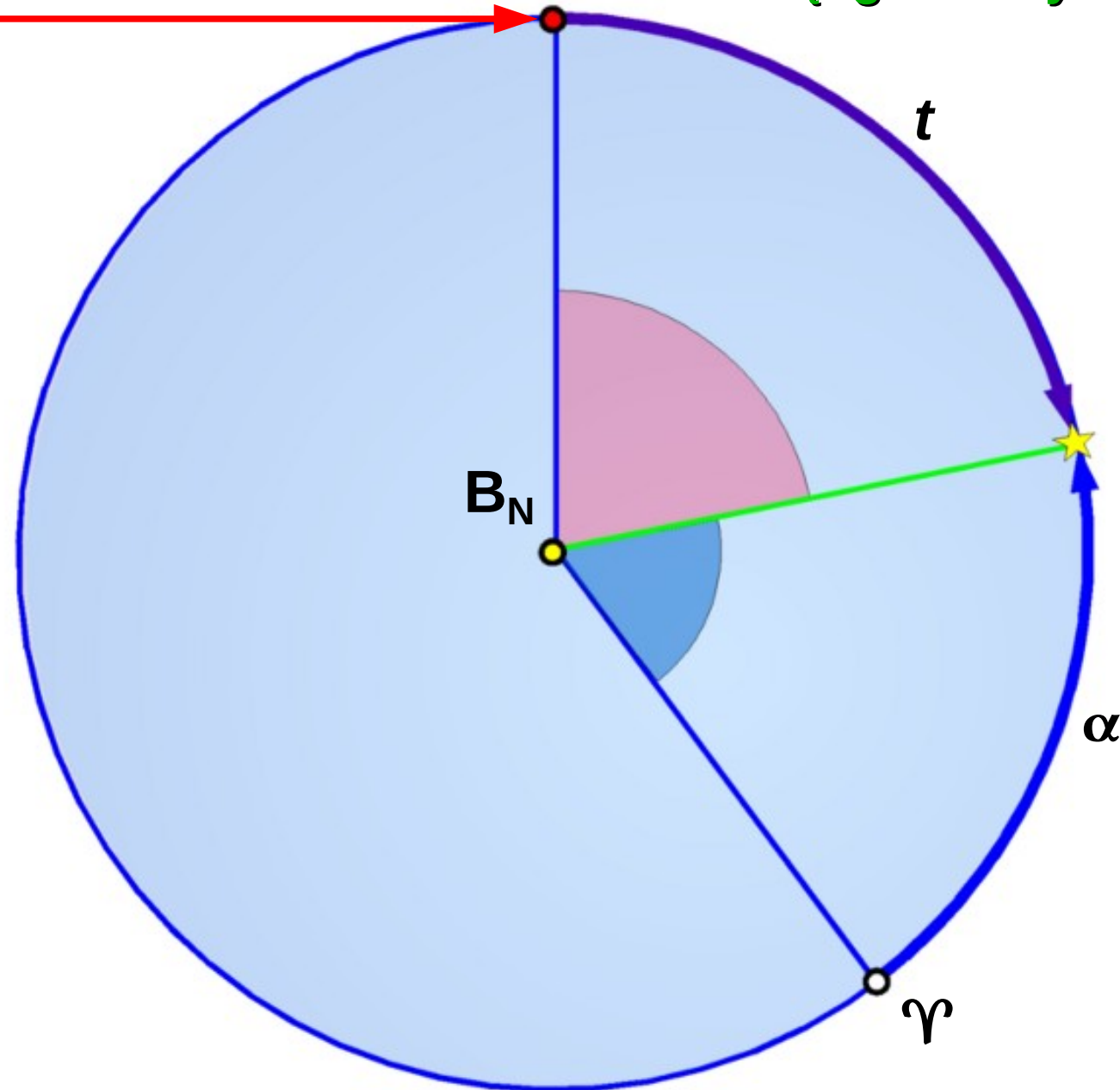
punkt
górowania
na równiku

kąt godzinny i rektascensja



punkt
górowania
na równiku

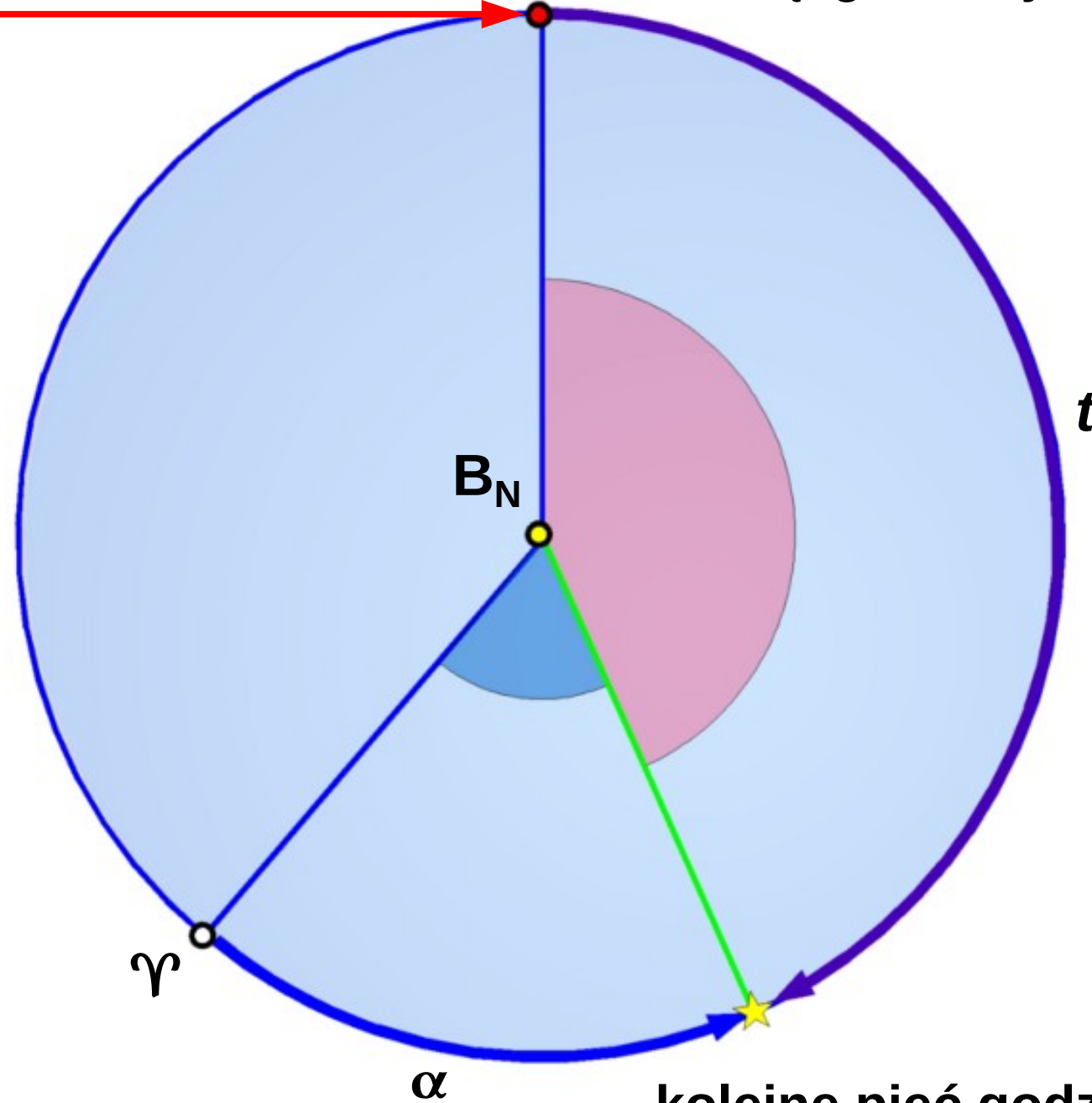
kąt godzinny i rektascensja



około dwie godziny później

punkt
górowania
na równiku

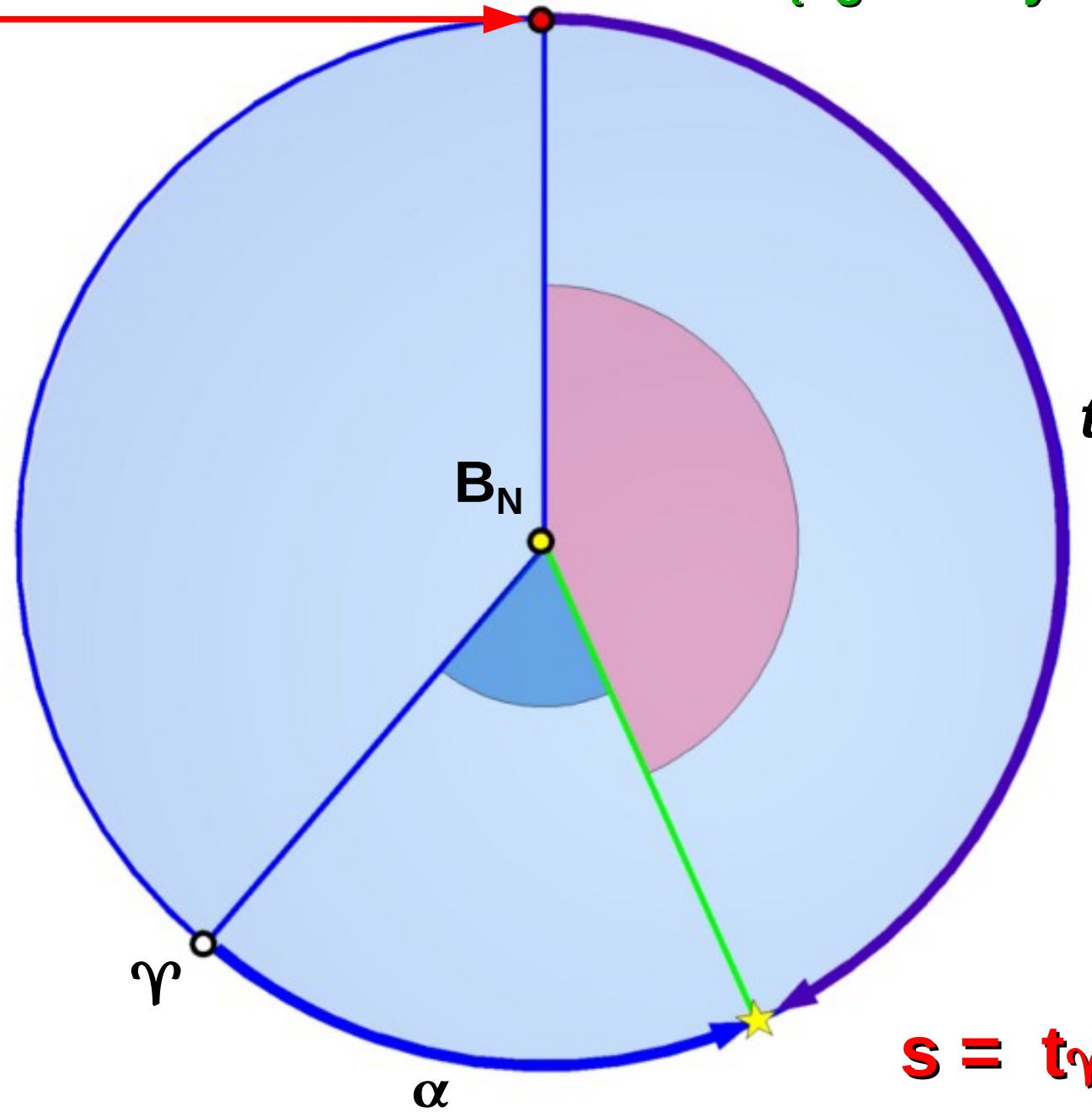
kąt godzinny i rektascensja



kolejne pięć godzin później

punkt
górowania
na równiku

kąt godzinny i rektascensja



$$s = t_{\gamma} = t_* + \alpha_*$$

Związki układu równikowego godzinnego z równonocnym

Mając t i δ musimy zmienić układ lewoskrętny na prawoskrętny więc wyliczamy troszkę inaczej składowe wektora $r_{t,\delta}$:

$$x = \cos t \cos \delta$$

$$y = -\sin t \cos \delta$$

$$z = \sin \delta$$

Po transformacji odwrotnej też zmieniamy znak składowej y w wektorze $r_{\alpha,\delta}$.

$$r_{\alpha,\delta} = R_z(-s) r_{t,\delta}$$

$$r_{t,\delta} = R_z(s) r_{\alpha,\delta}$$

gdzie s jest miejscowym czasem gwiazdowym

Operatory obrotu:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



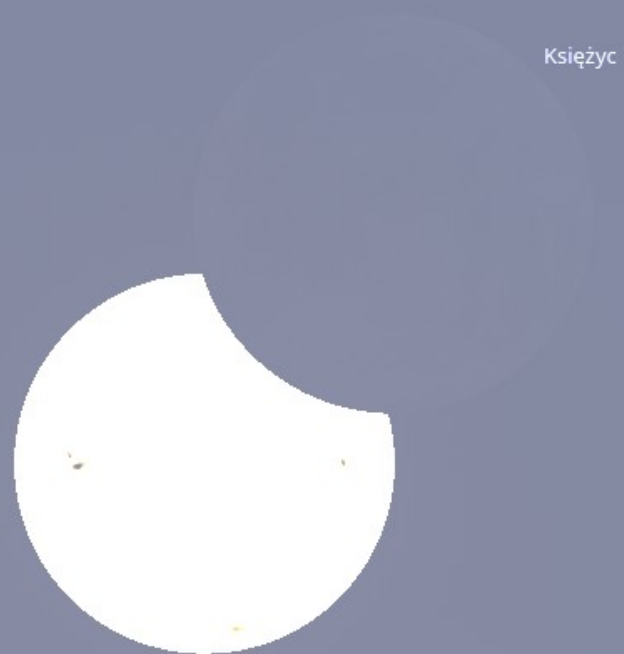
Odczytaj współrzędne horyzontalne i równikowe równonocne Jowisza, Betelgezy, Syriusza i Procjona.

Obiekt	Azymut	Wysokość	Rektascensja	Deklinacja
Jowisz	267°	30°	4 ^h 55 ^m	22°
Betelgeza	244°	27°	5 ^h 55 ^m	7°
Syriusz	221°	11°	6 ^h 45 ^m	-17°
Procjon	216°	36°	7 ^h 39 ^m	5°

Częściowe zaćmienie Słońca

29 marca 2025 11:42 – 13:10

<https://www.astro.amu.edu.pl/pl/czesciowe-zacmienie-slonca-29-marca-2025/>



Data i godzina

2025

-

3

-

29

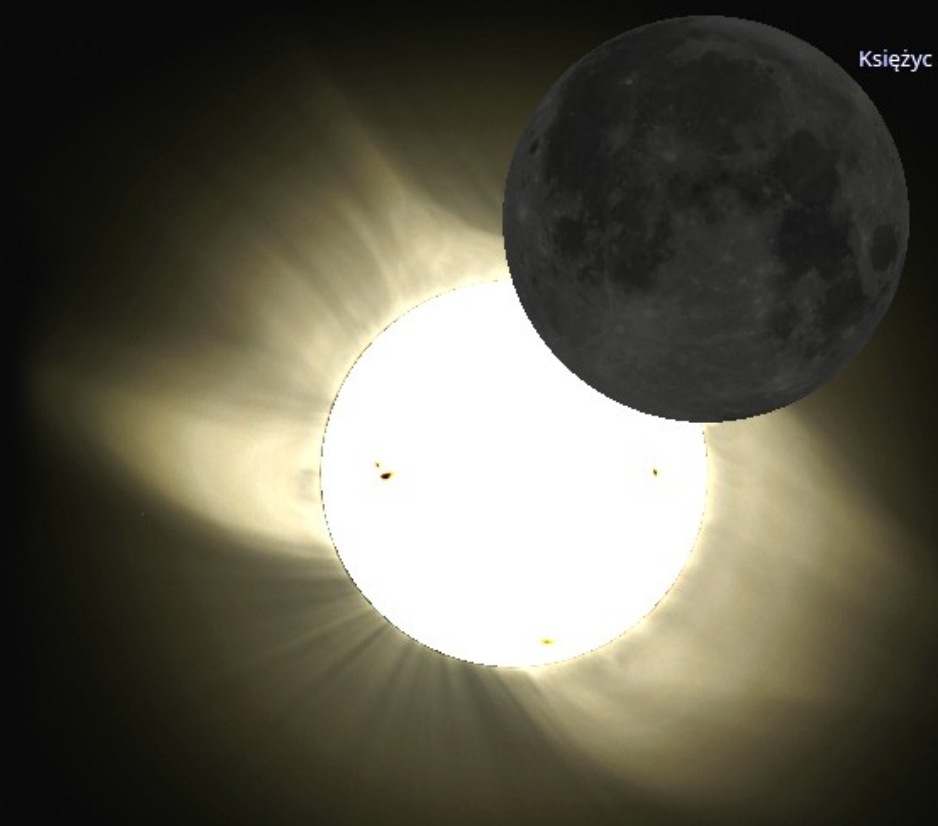
12

:

32

:

0



Data i godzina

2025

-

3

-

29

12

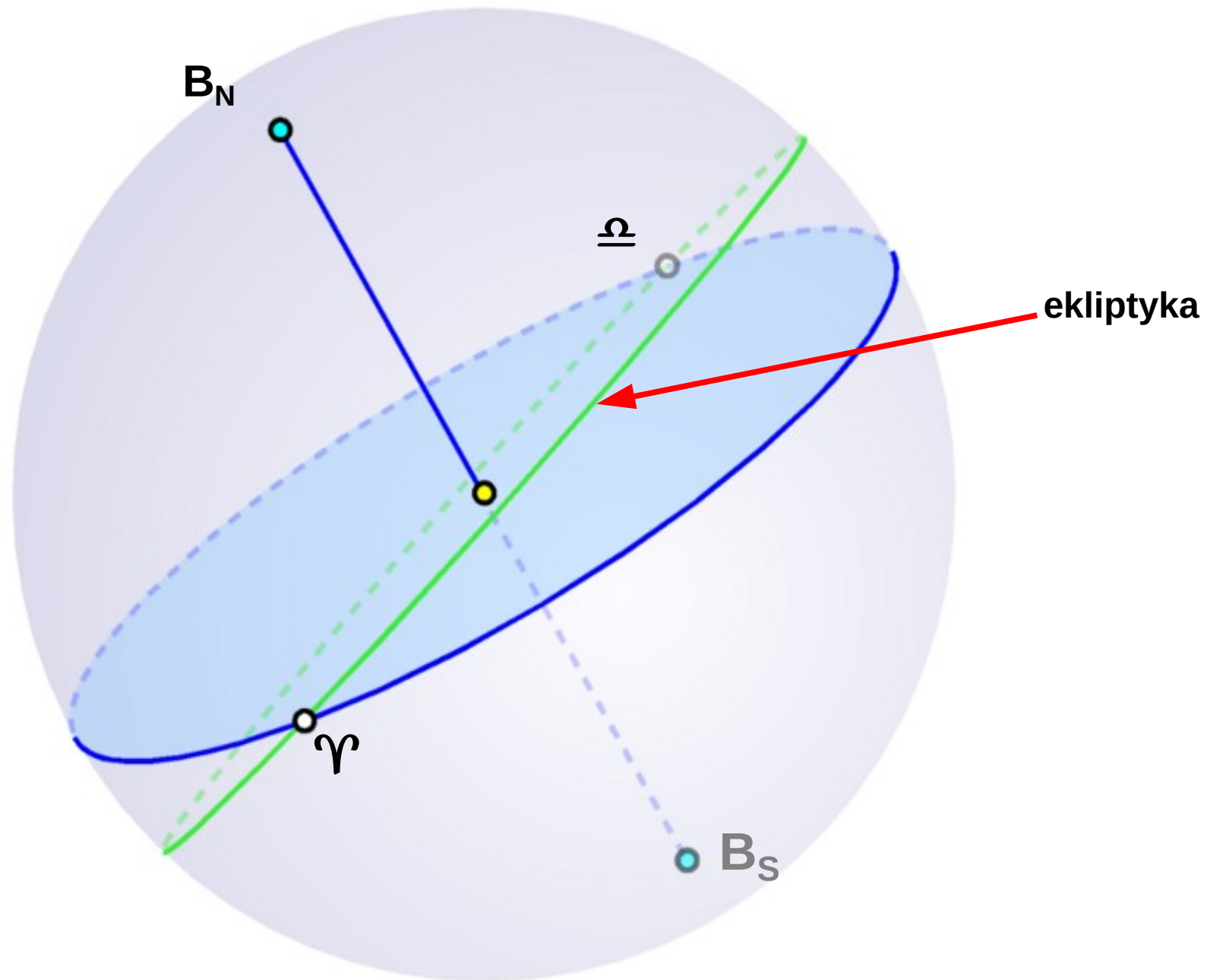
:

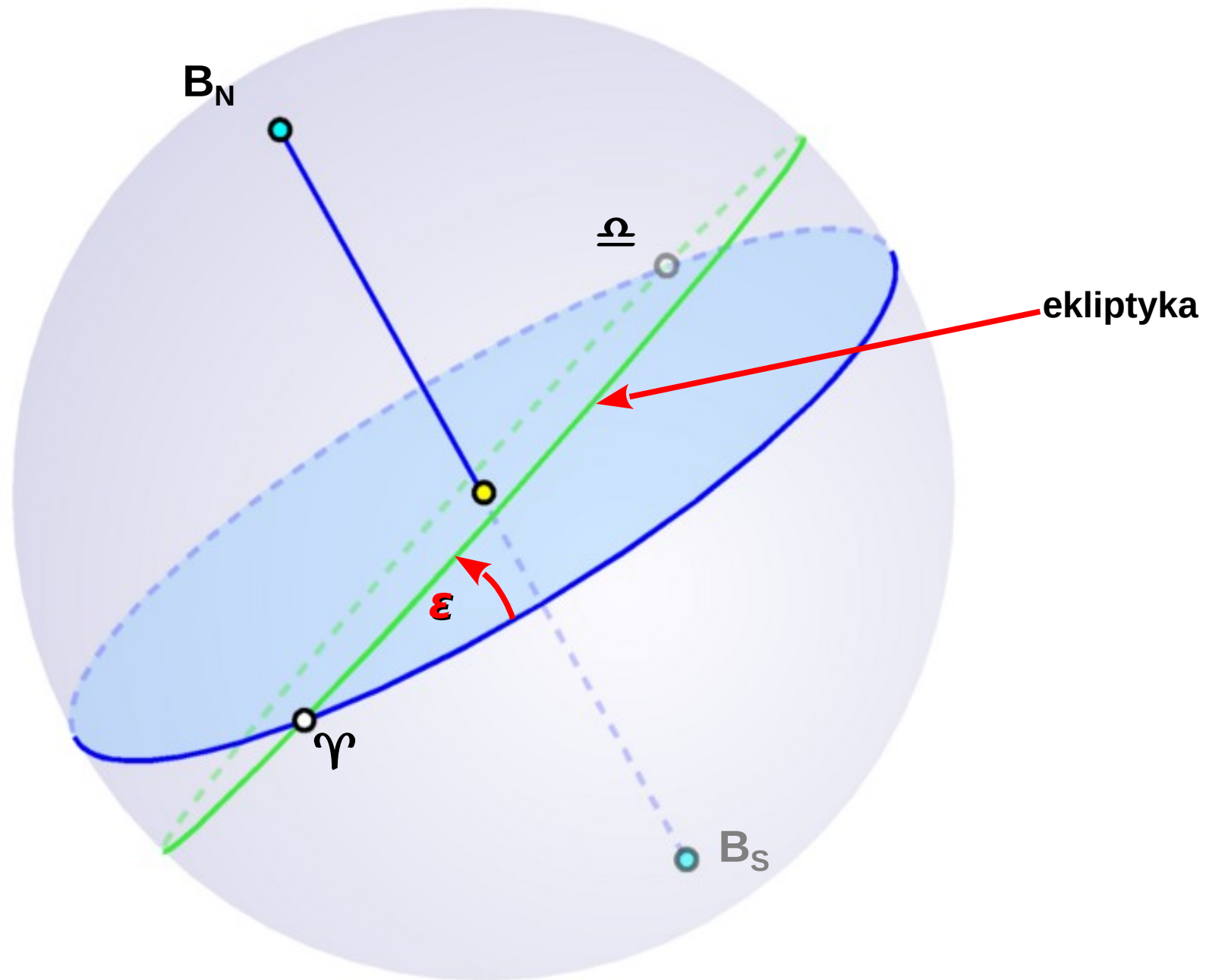
32

:

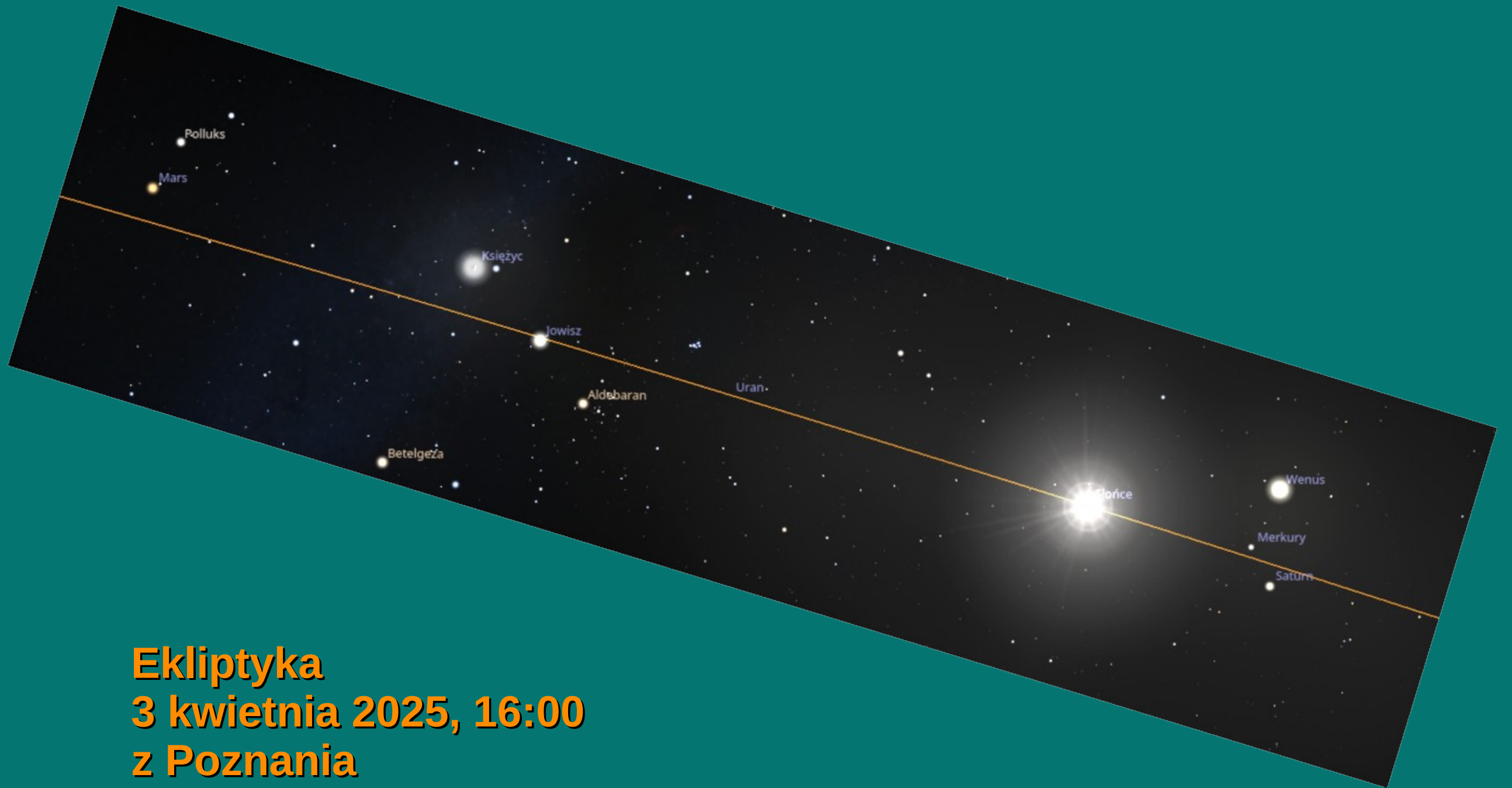
0

Układ ekliptyczny





$$\epsilon_{2000} = 23^\circ 26' 21.448''$$



Ekliptyka
3 kwietnia 2025, 16:00
z Poznania

Związki układu ekliptycznego z równikowym równonocnym

Przez $r_{\alpha,\beta}$ oznaczamy wersor, którego składowe x , y i z wyliczamy ze wzorów:

$$x = \cos \alpha \cos \beta$$

$$y = \sin \alpha \cos \beta$$

$$z = \sin \beta$$

$$r_{\alpha,\delta} = R_x(-\varepsilon) r_{\lambda,\beta}$$

$$r_{\lambda,\beta} = R_x(\varepsilon) r_{\alpha,\delta}$$

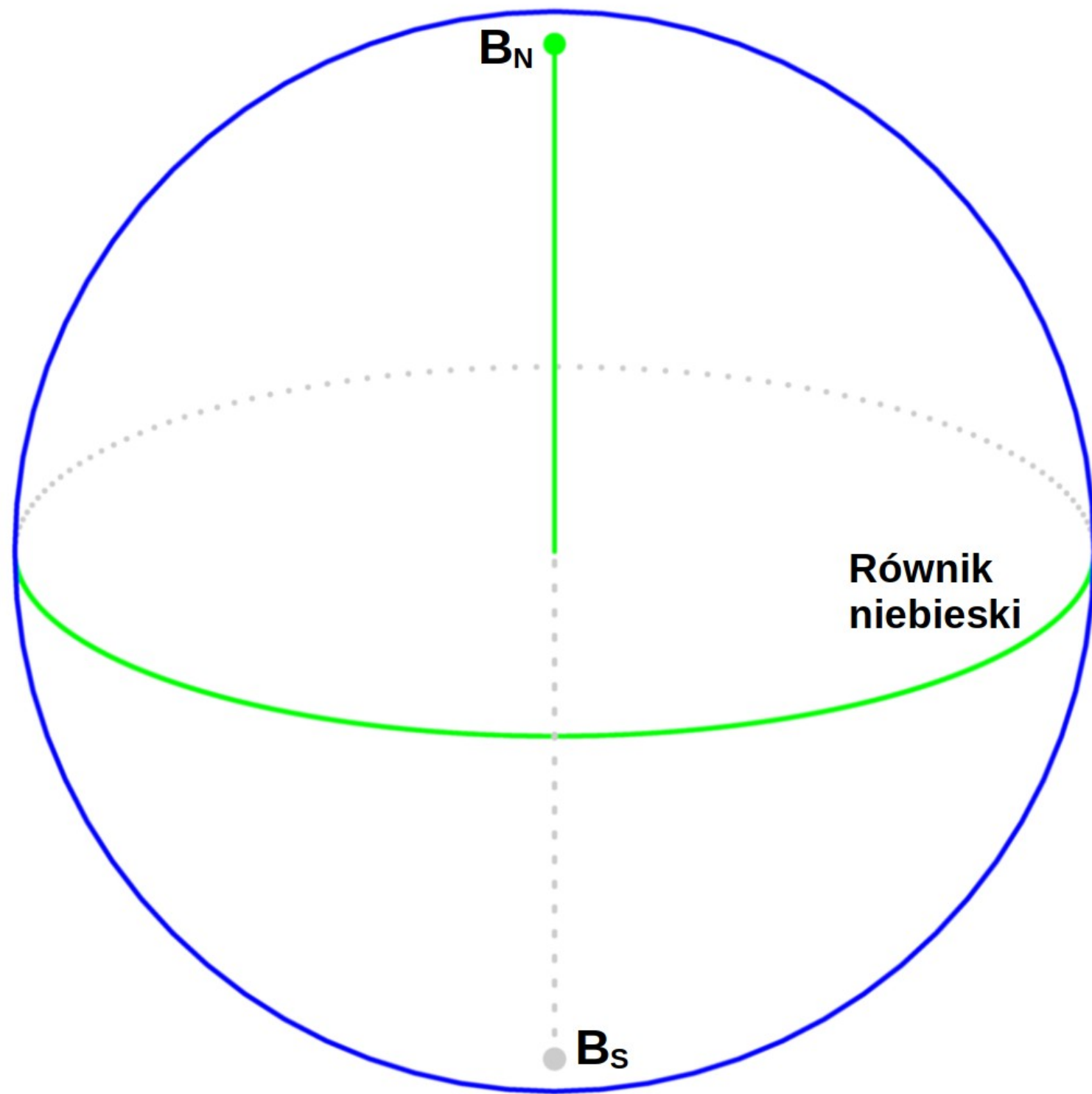
Operatory obrotu:

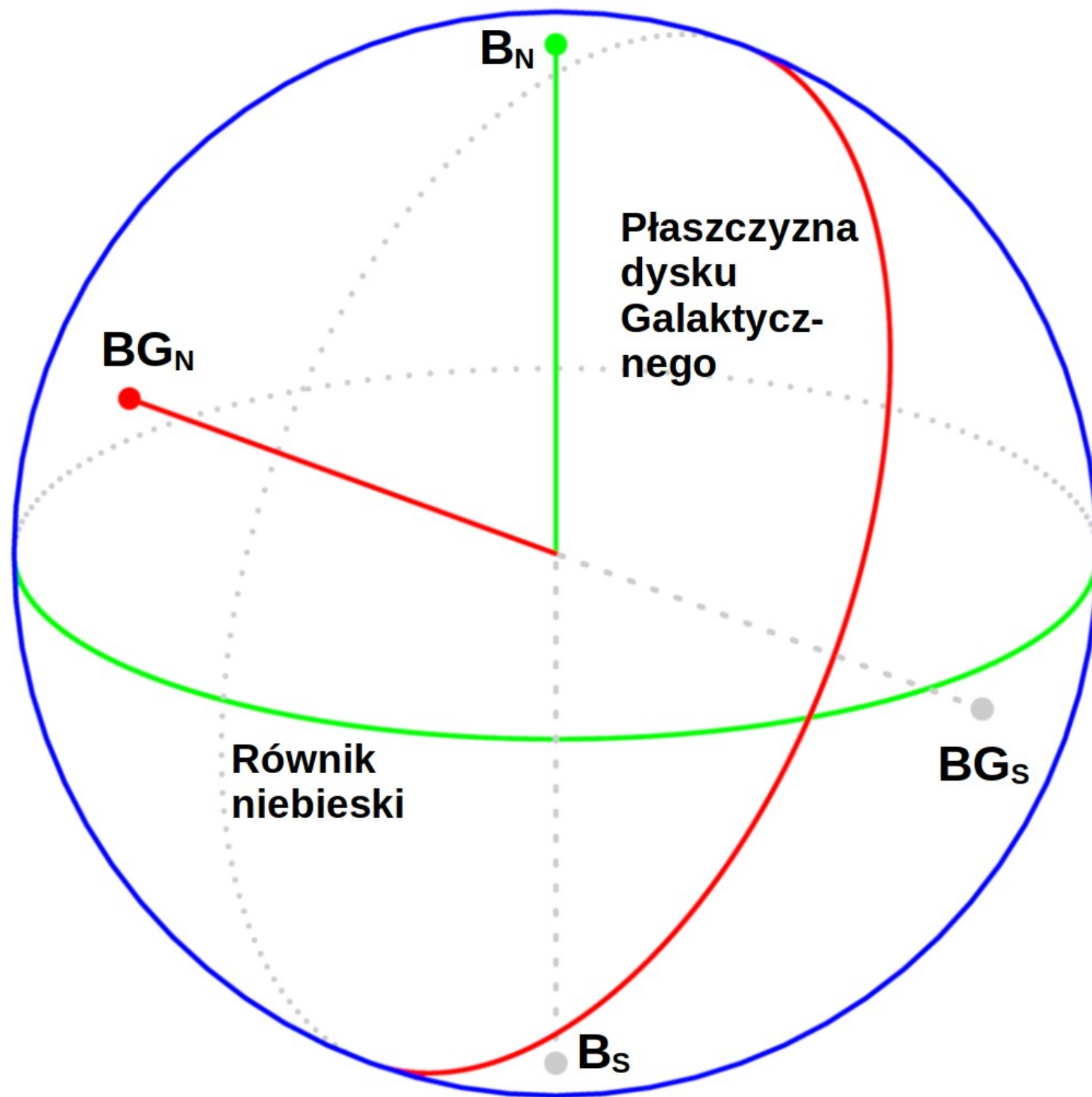
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

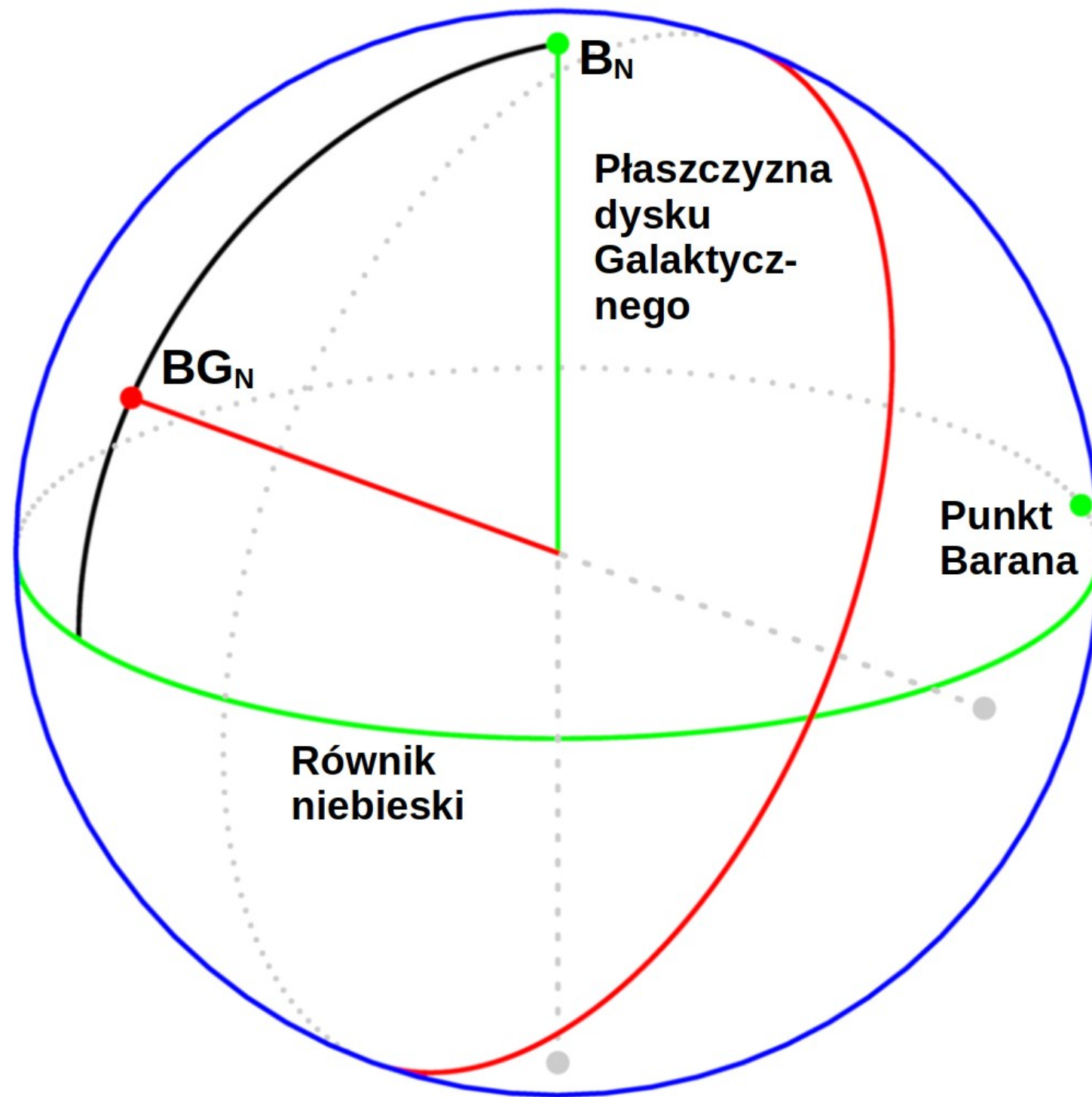
$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

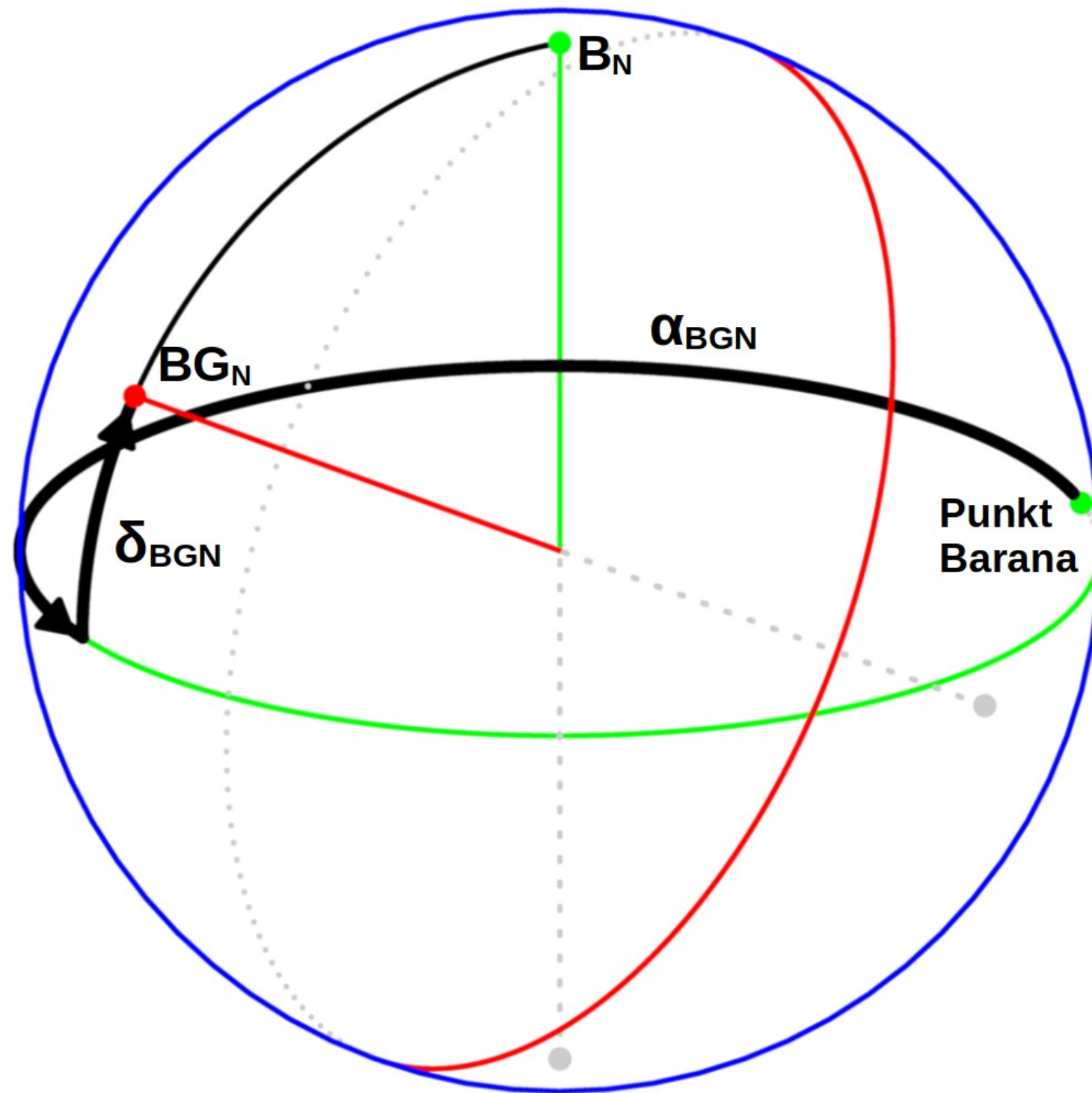
$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

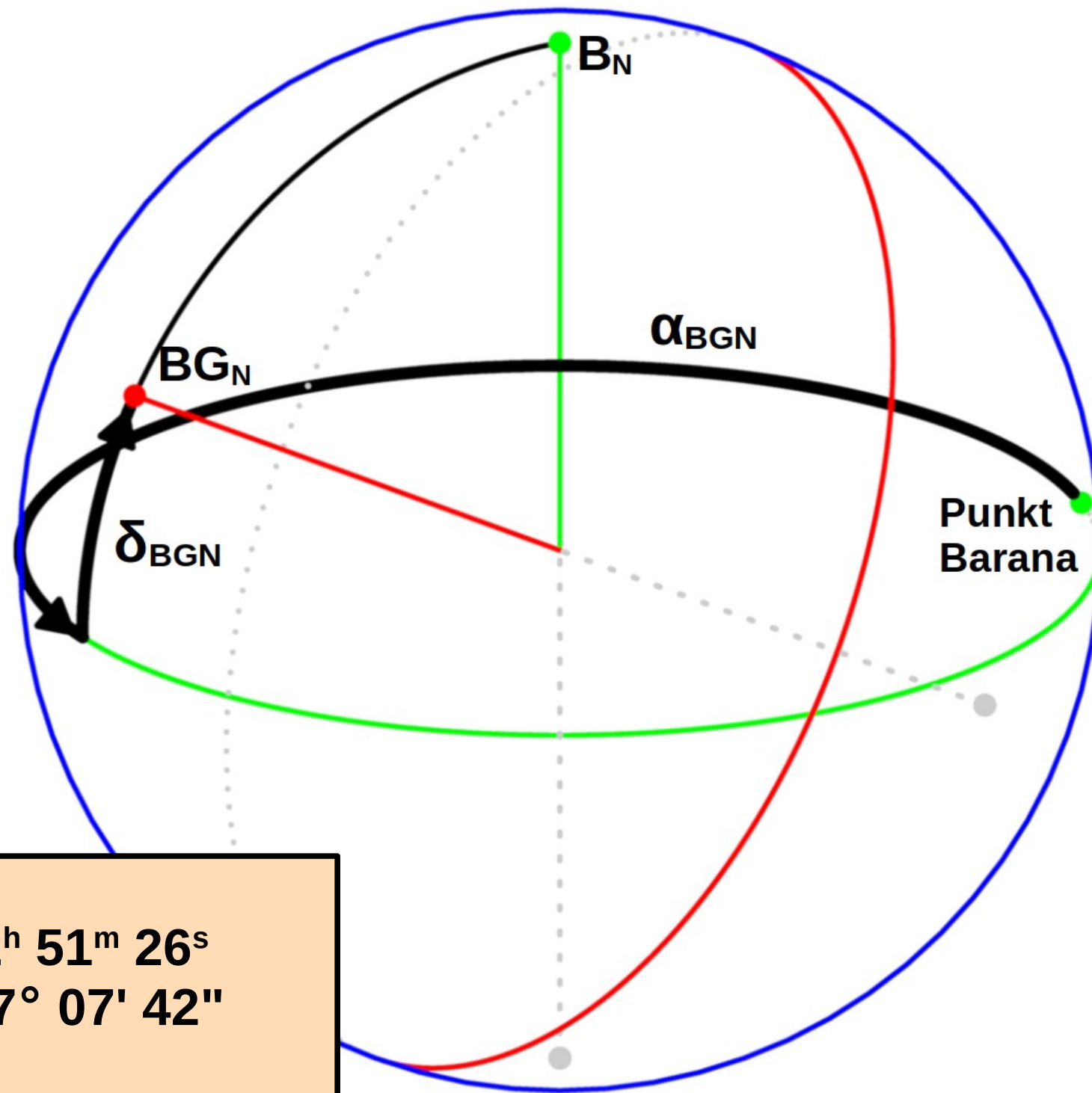
Układ Galaktyczny





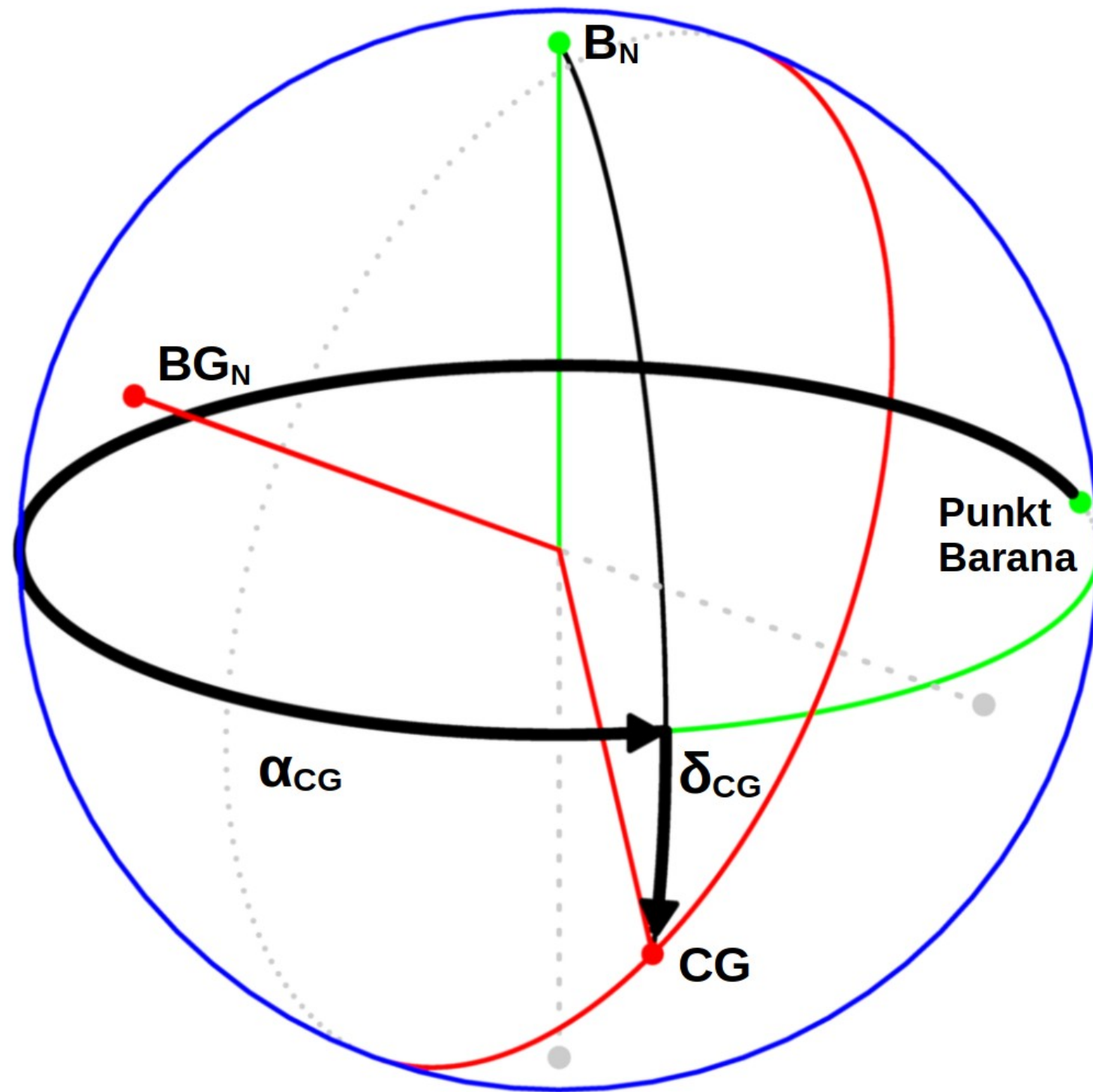


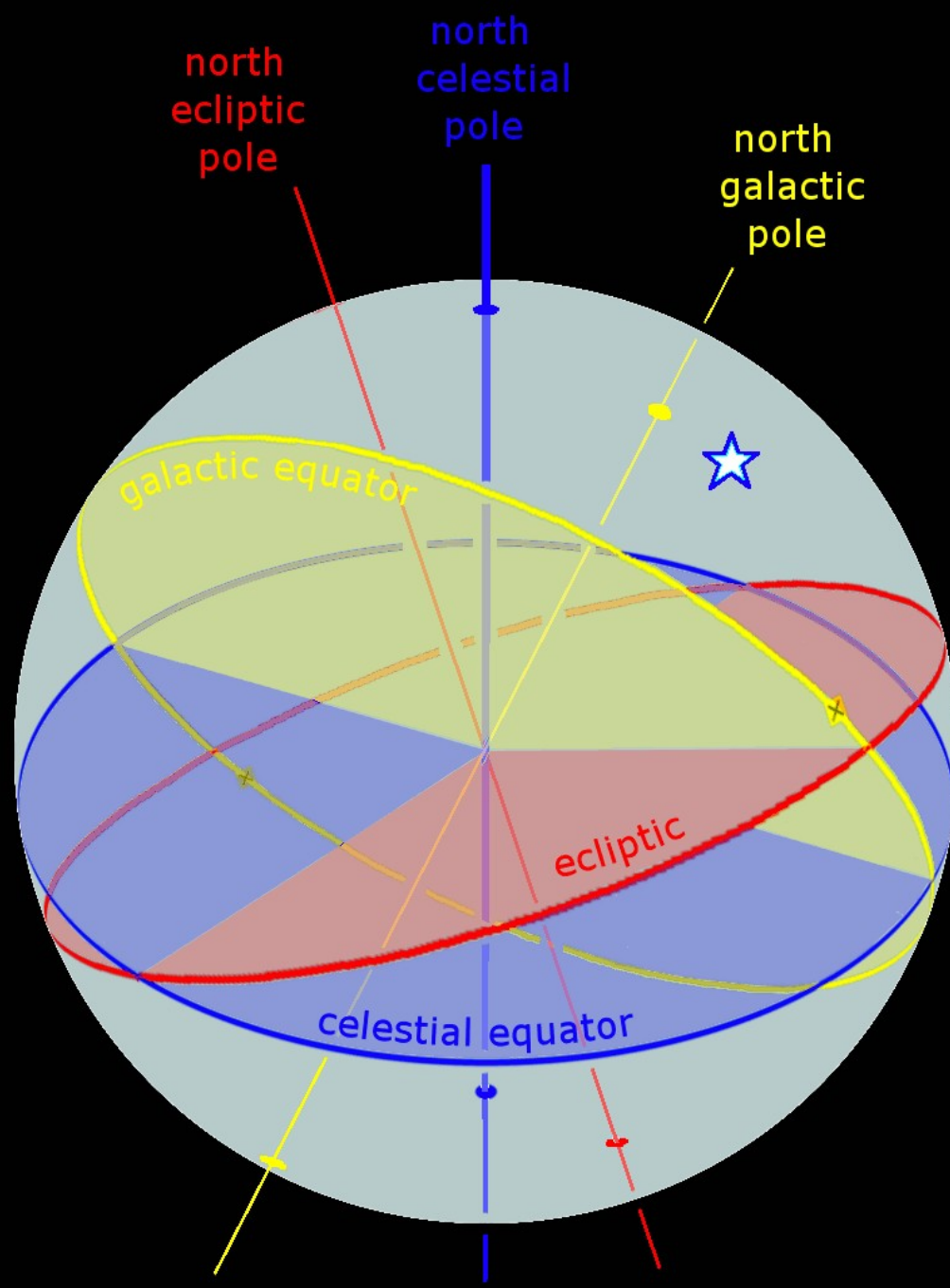


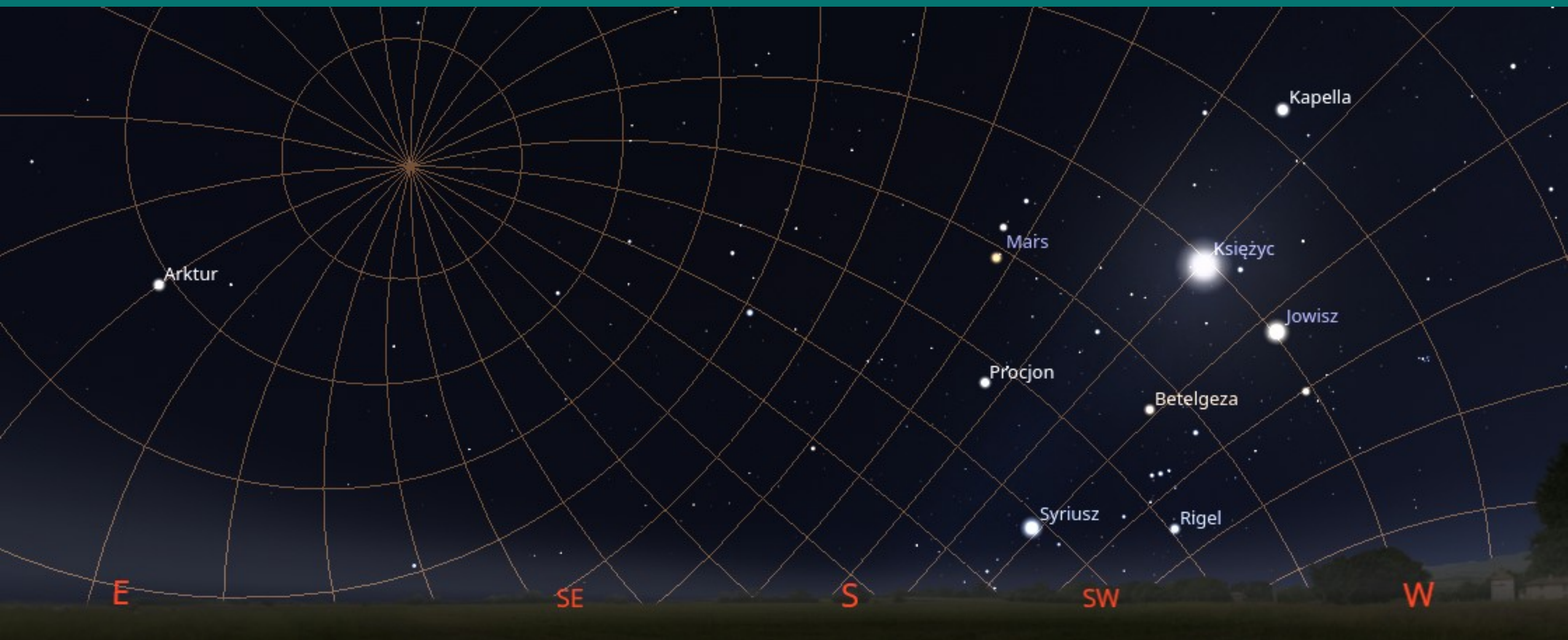


$$\alpha_{\text{BGN}} = 12^{\text{h}} 51^{\text{m}} 26^{\text{s}}$$

$$\delta_{\text{BGN}} = +27^{\circ} 07' 42''$$







Siatka współrzędnych Galaktycznych, 3 kwietnia 2025, 21:00

Transformacja współrzędnych

Jeżeli zdefiniujemy sobie takie kąty:

- $G1 = 90^\circ + \alpha_{BGN}$
- $G2 = 90^\circ - \delta_{BGN}$
- $G3 = 90^\circ - \theta,$

gdzie $\theta = 122.93192^\circ$ jest Galaktyczną długością północnego bieguna świata (B_N)

to przeliczenie współrzędnych równikowych na Galaktyczne wygląda tak:

$$r_{lb} = R_z(G3) R_x(G2) R_z(G1) r_{\alpha\delta}$$

Dziękuję za uwagę