

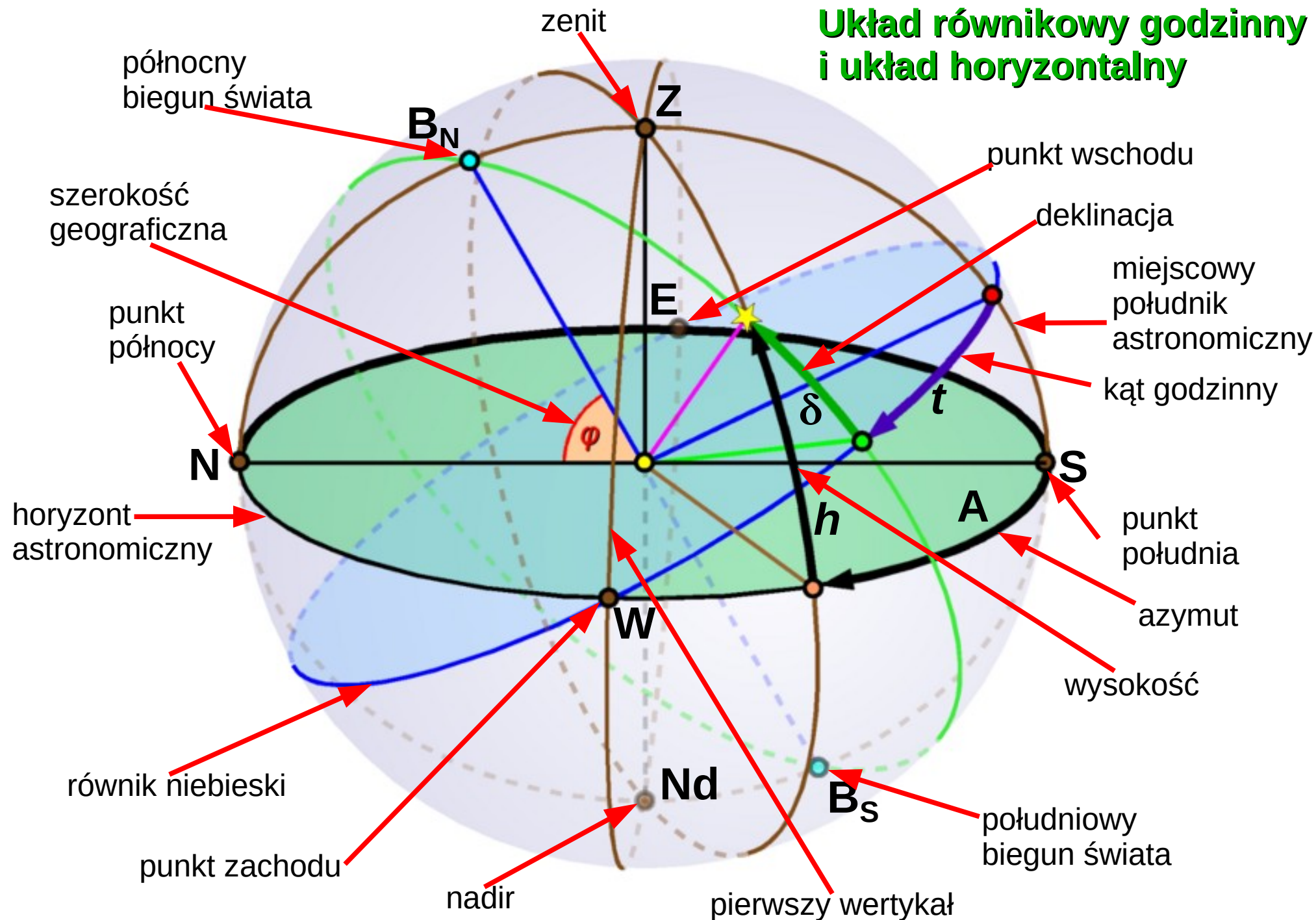
Wykład udostępniam na licencji Creative Commons:

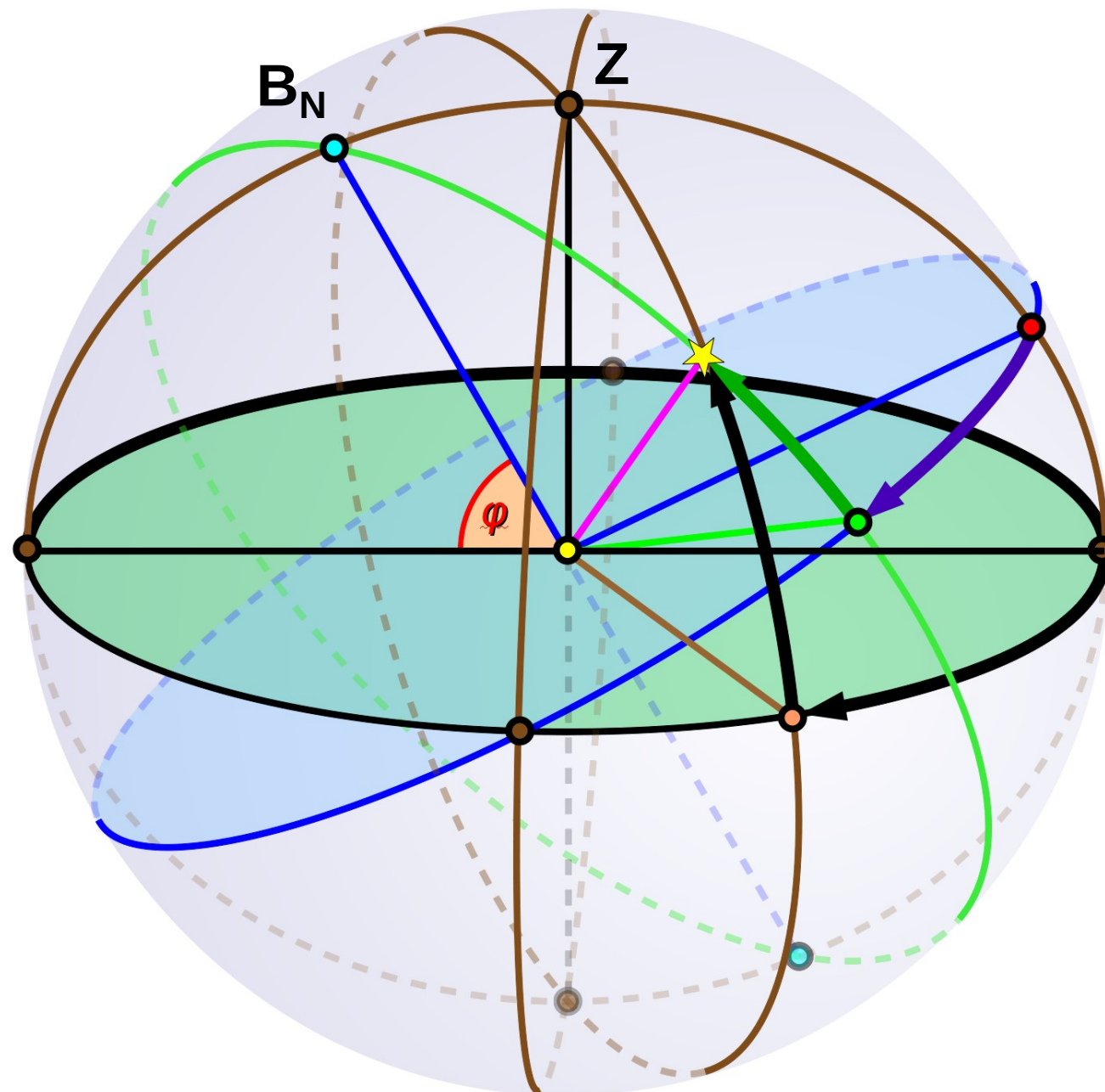


Wędrówki między układami współrzędnych.

Piotr A. Dybczyński

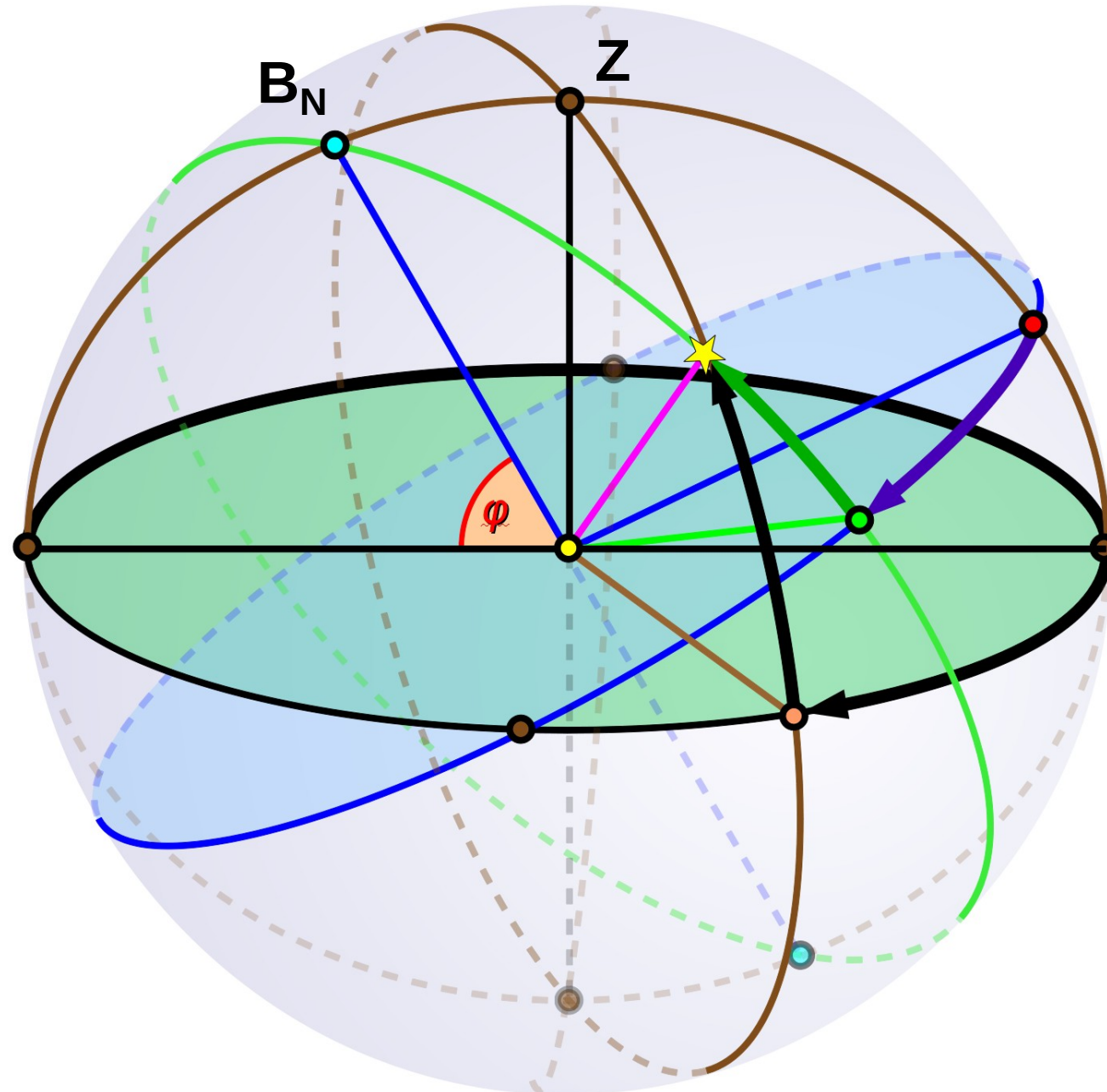
Układ równikowy godzinny i układ horyzontalny

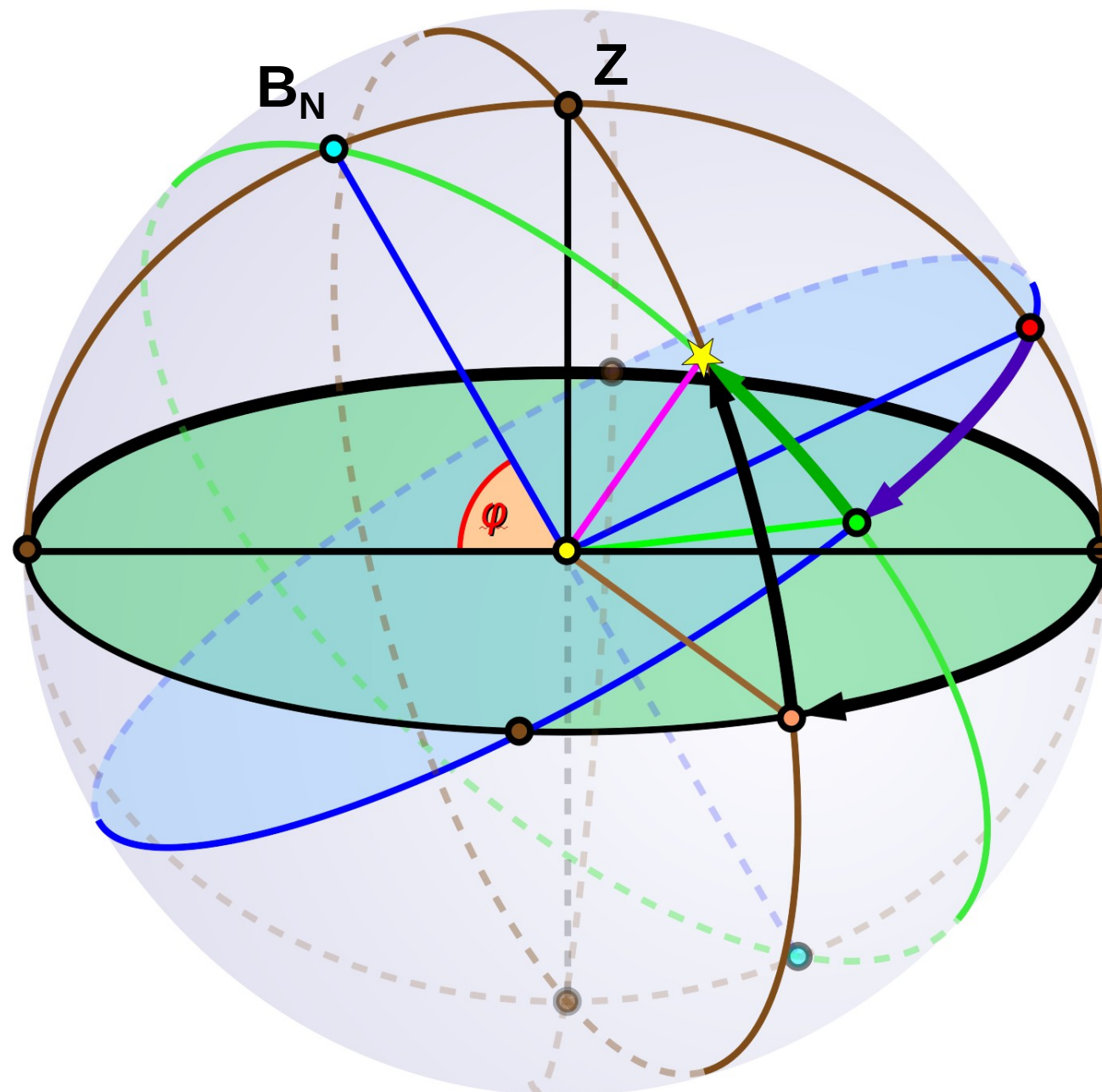




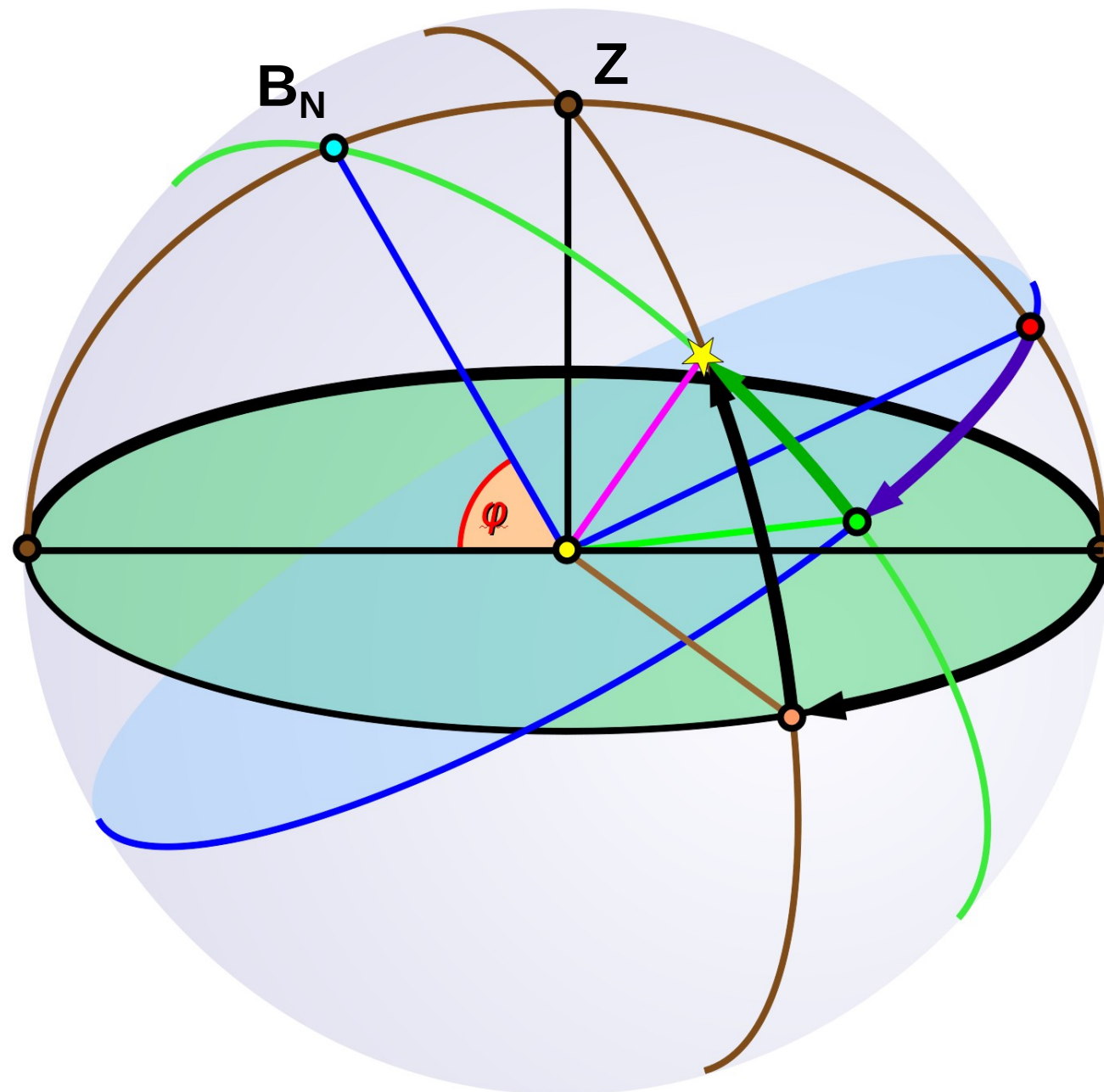


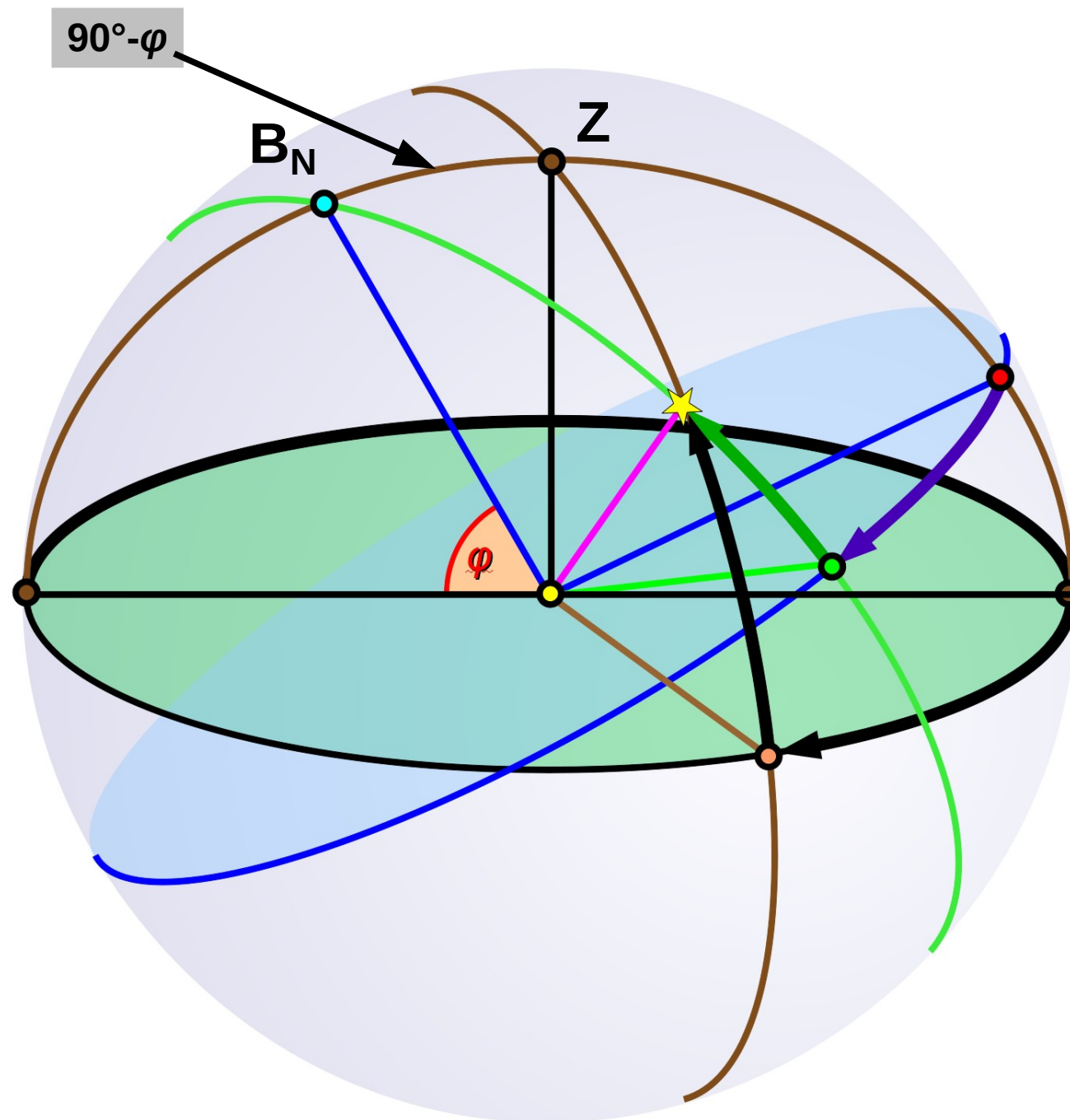
Usuńmy pierwszy wertykał...

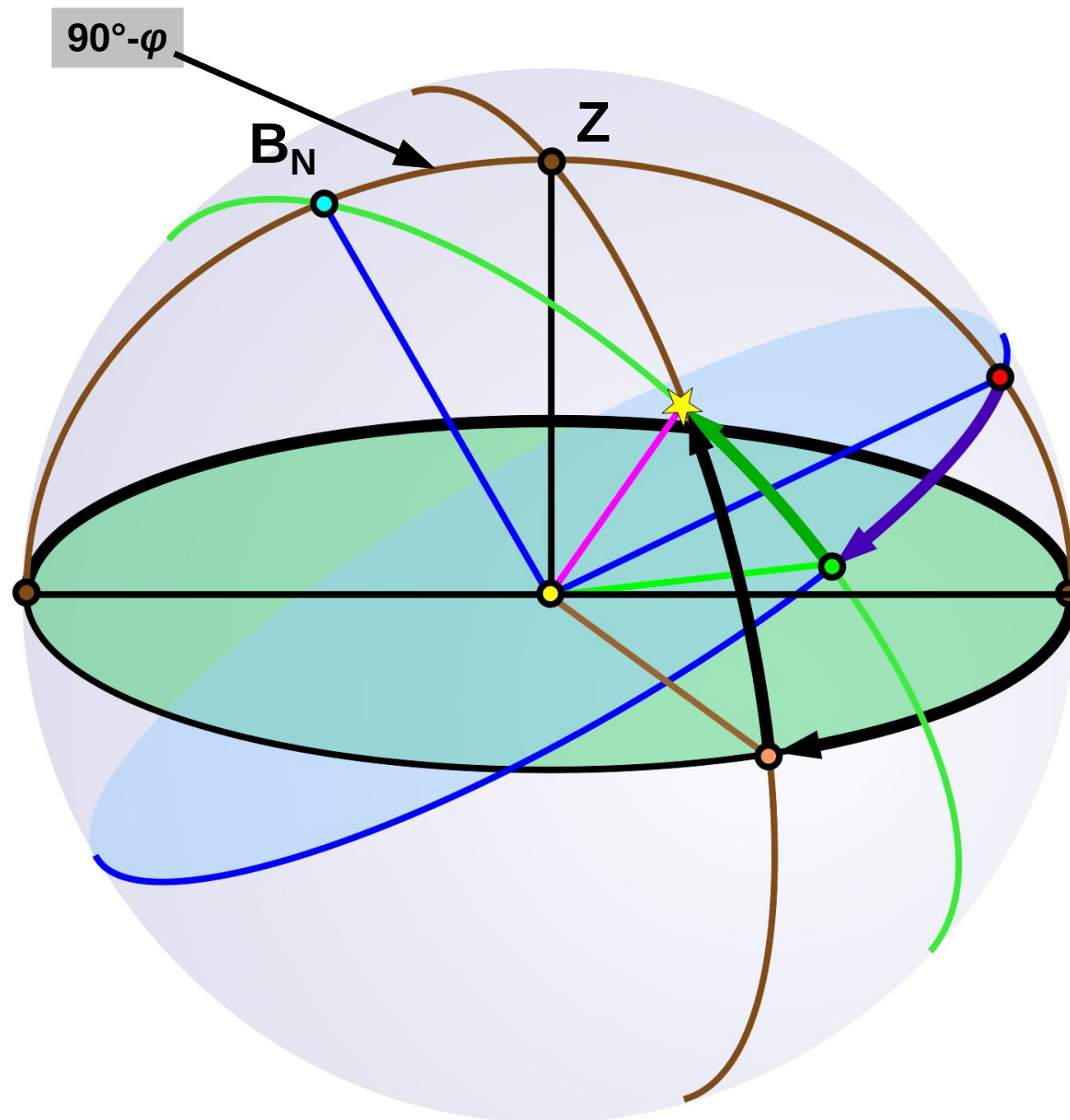


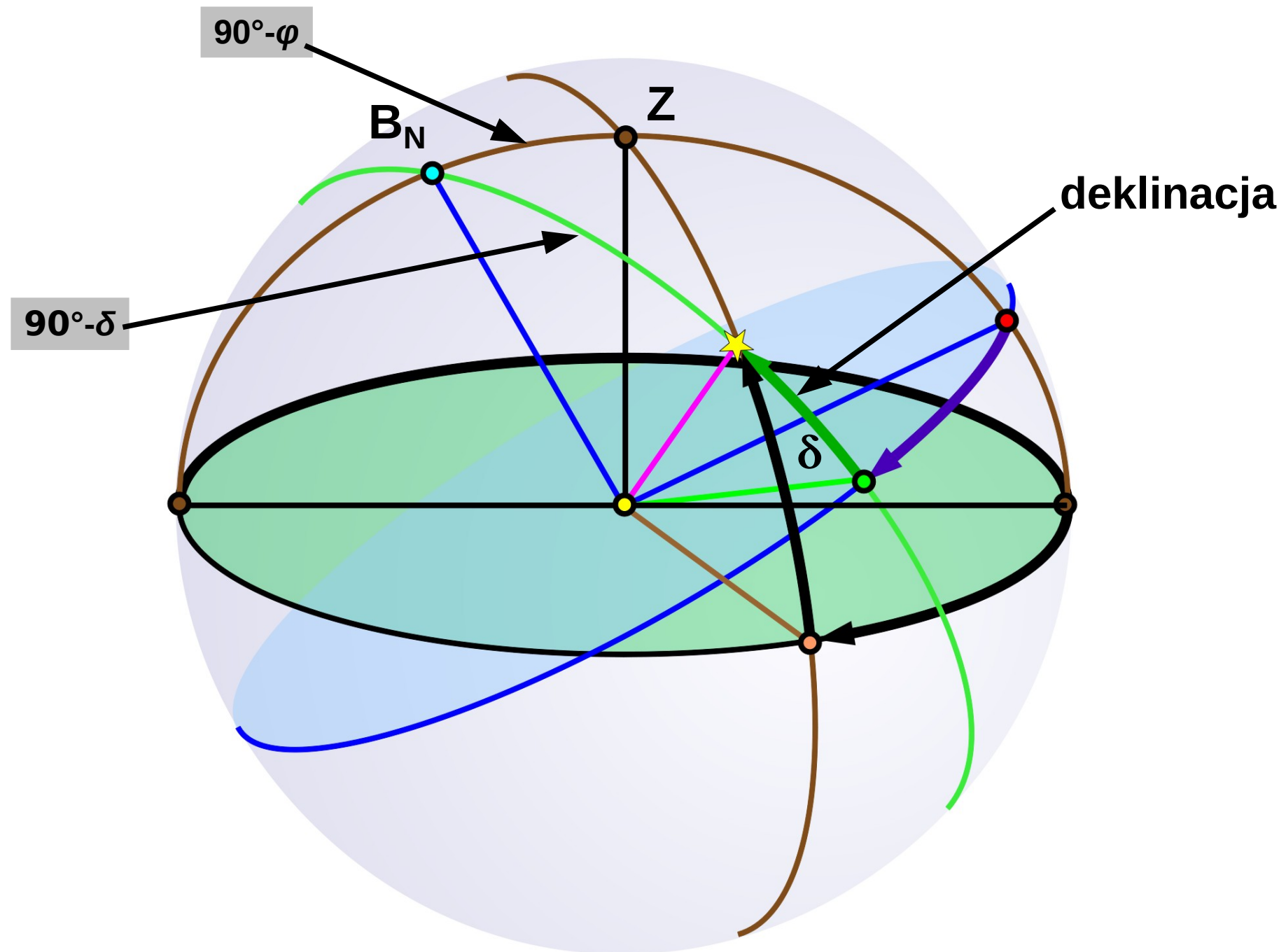


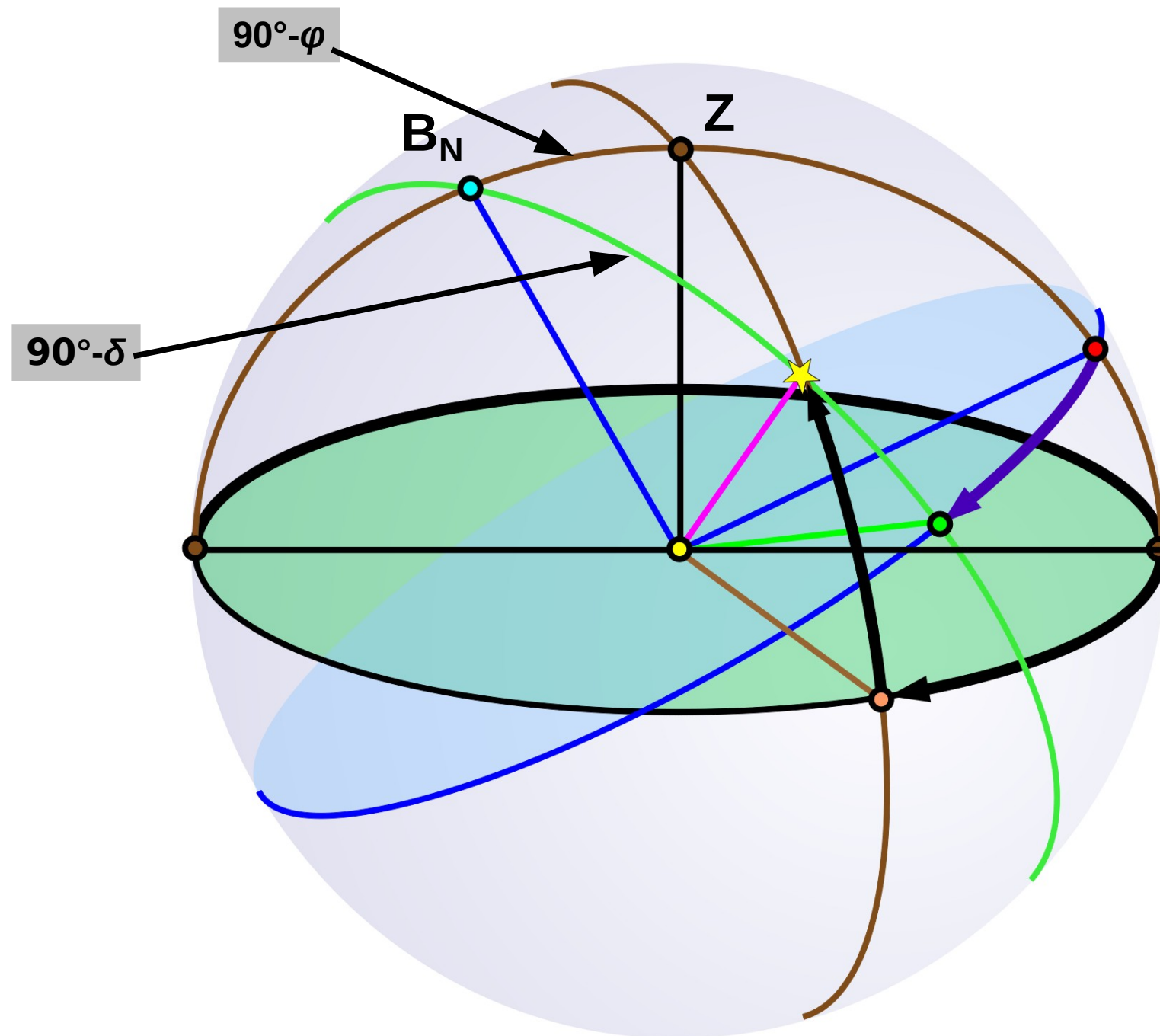
Usuńmy niewidoczne linie...

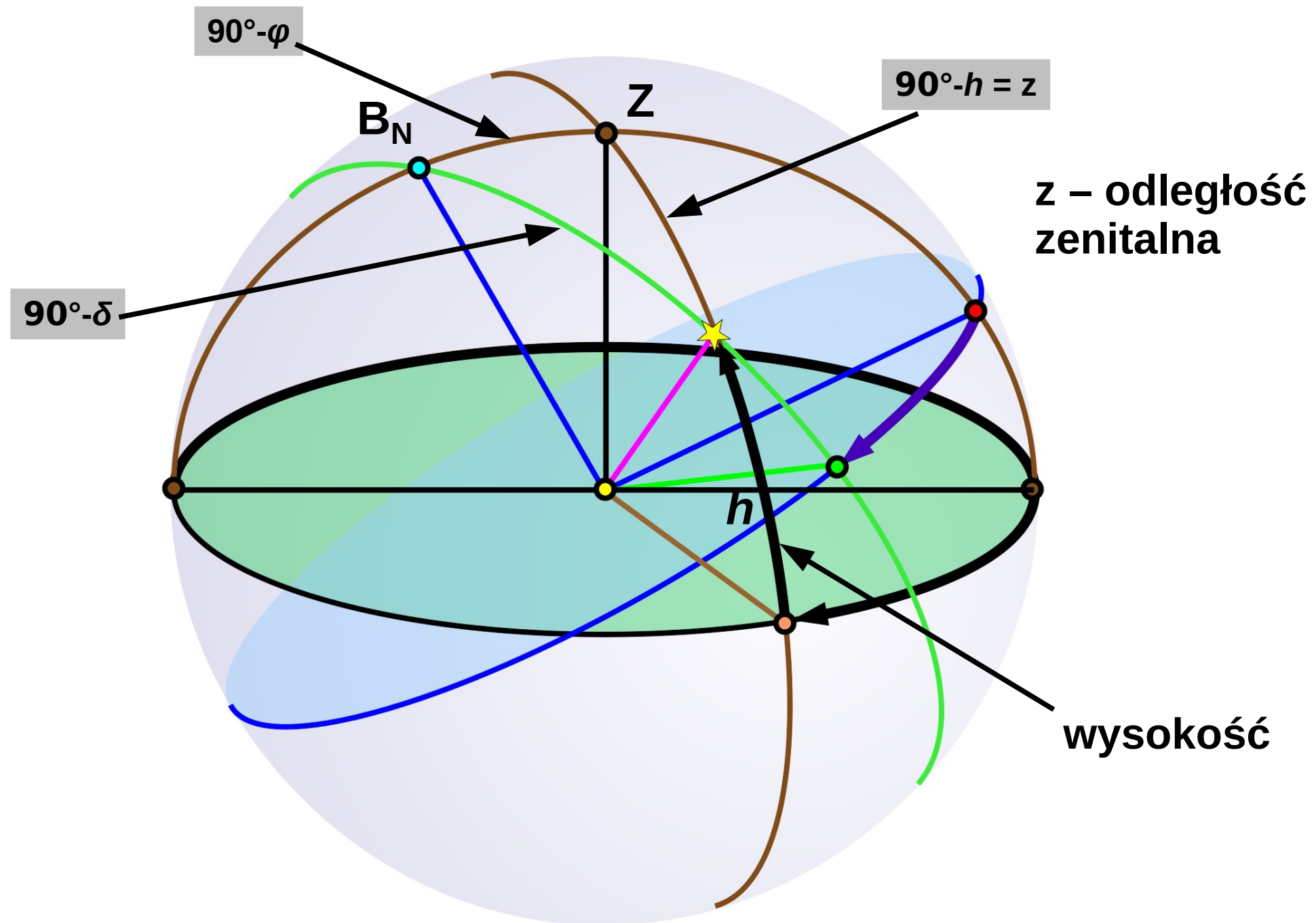


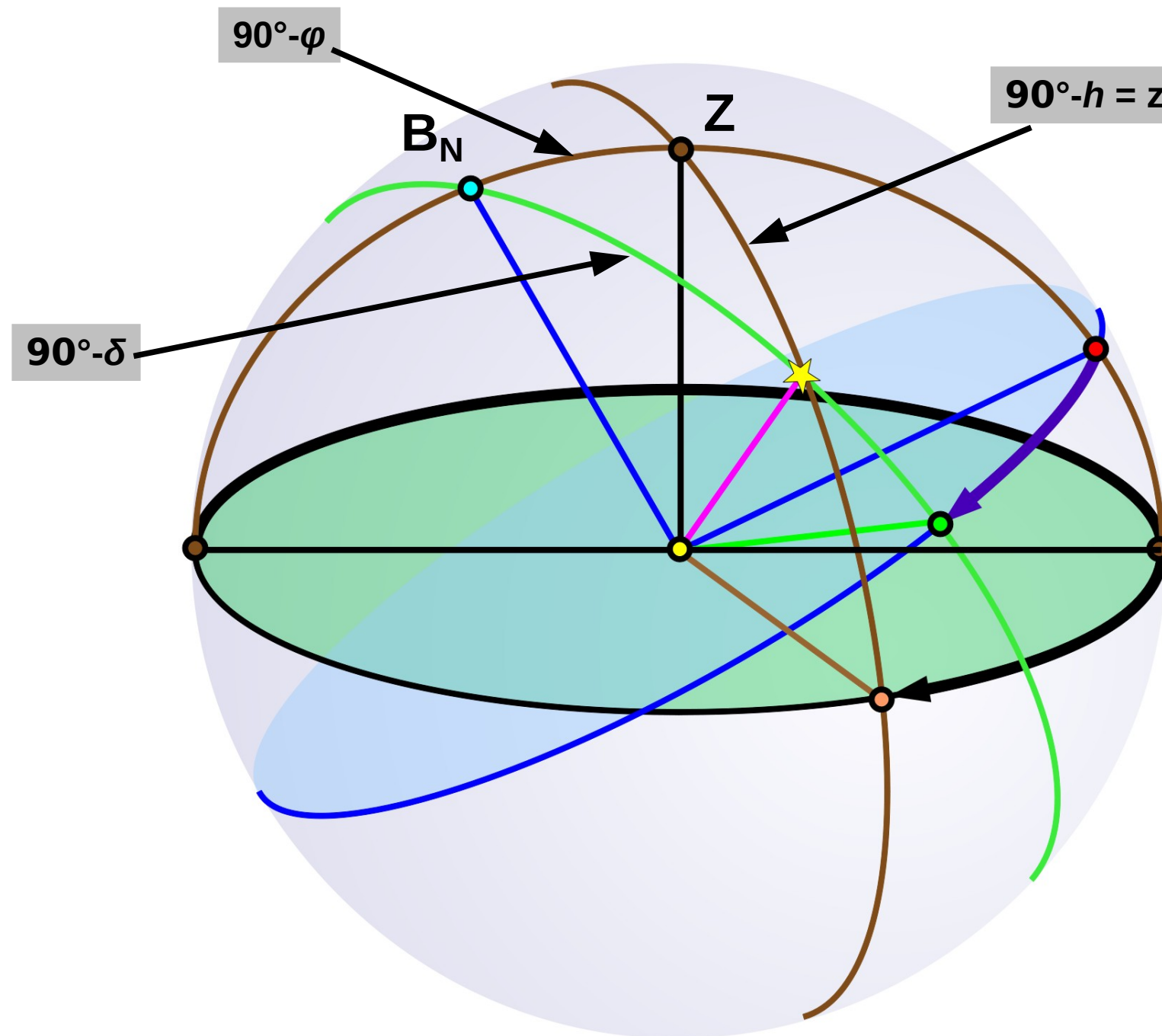


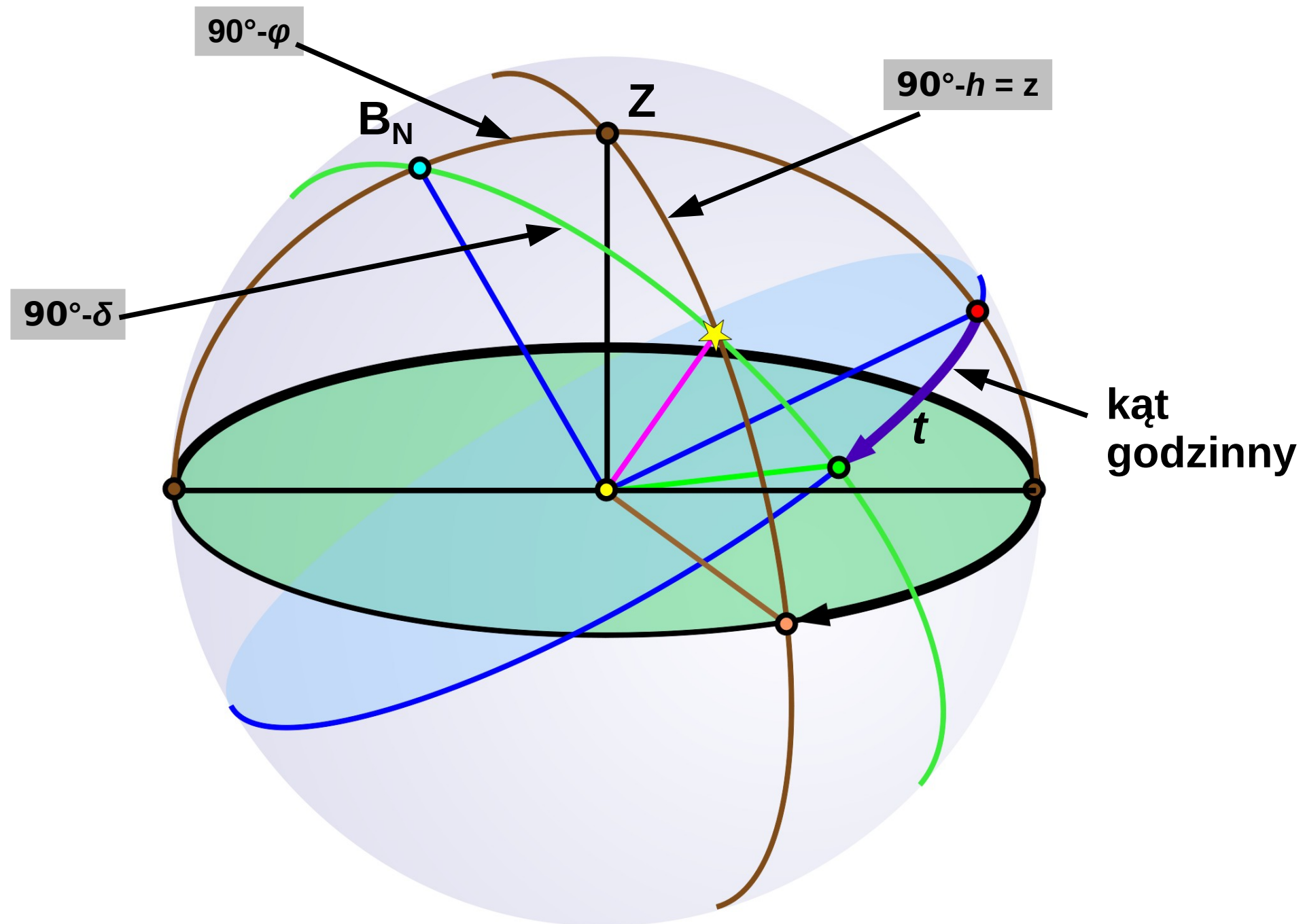


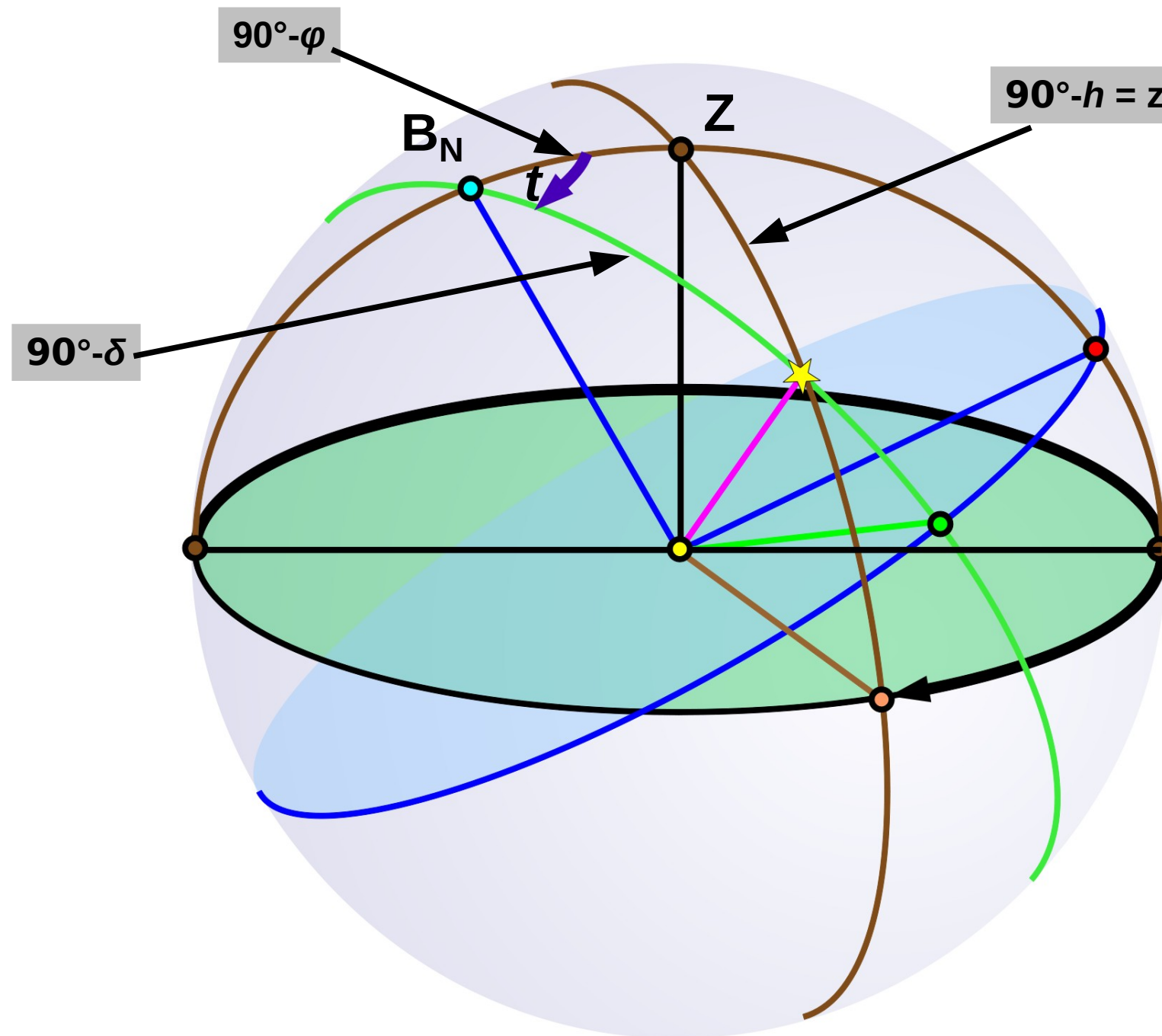


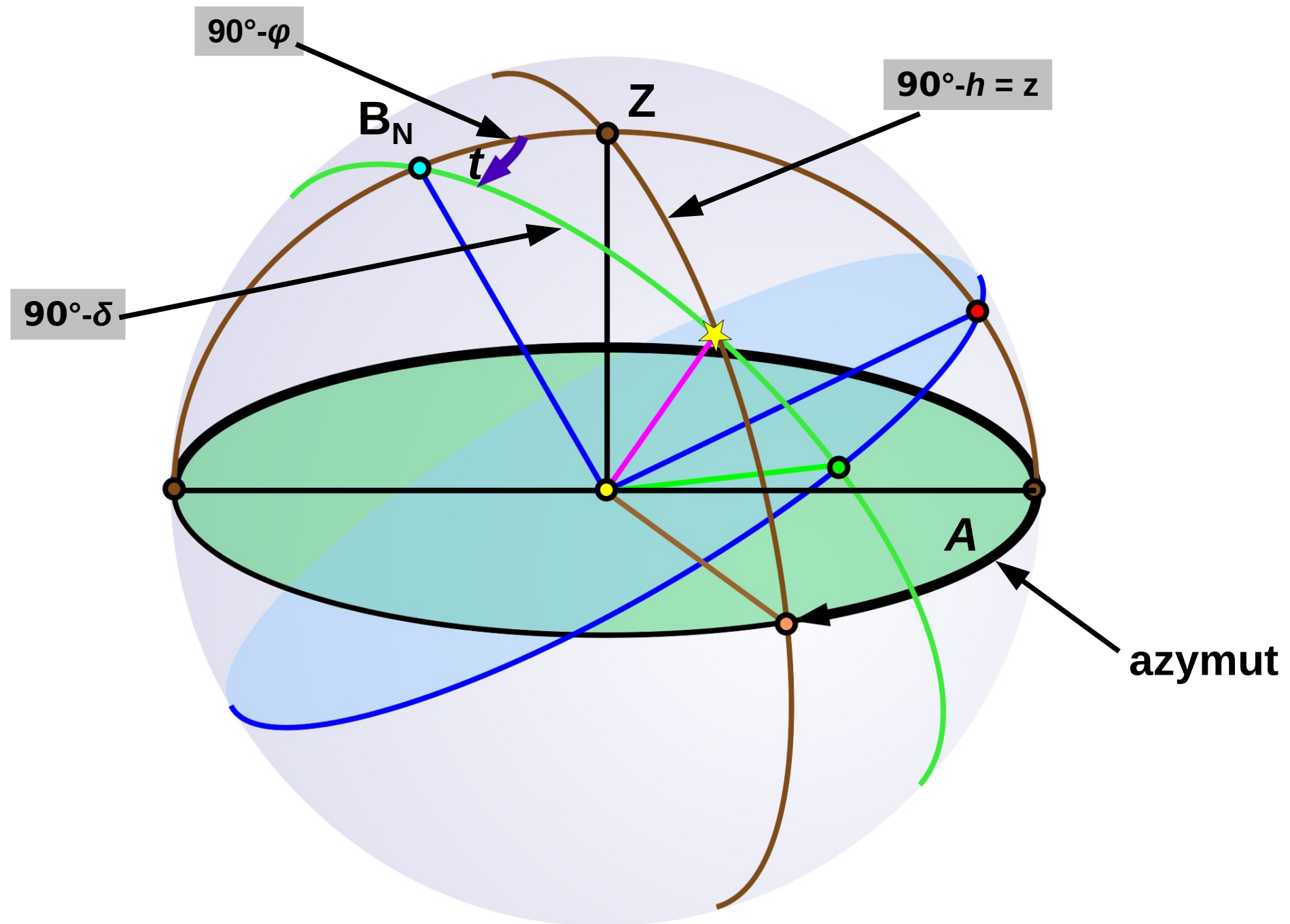


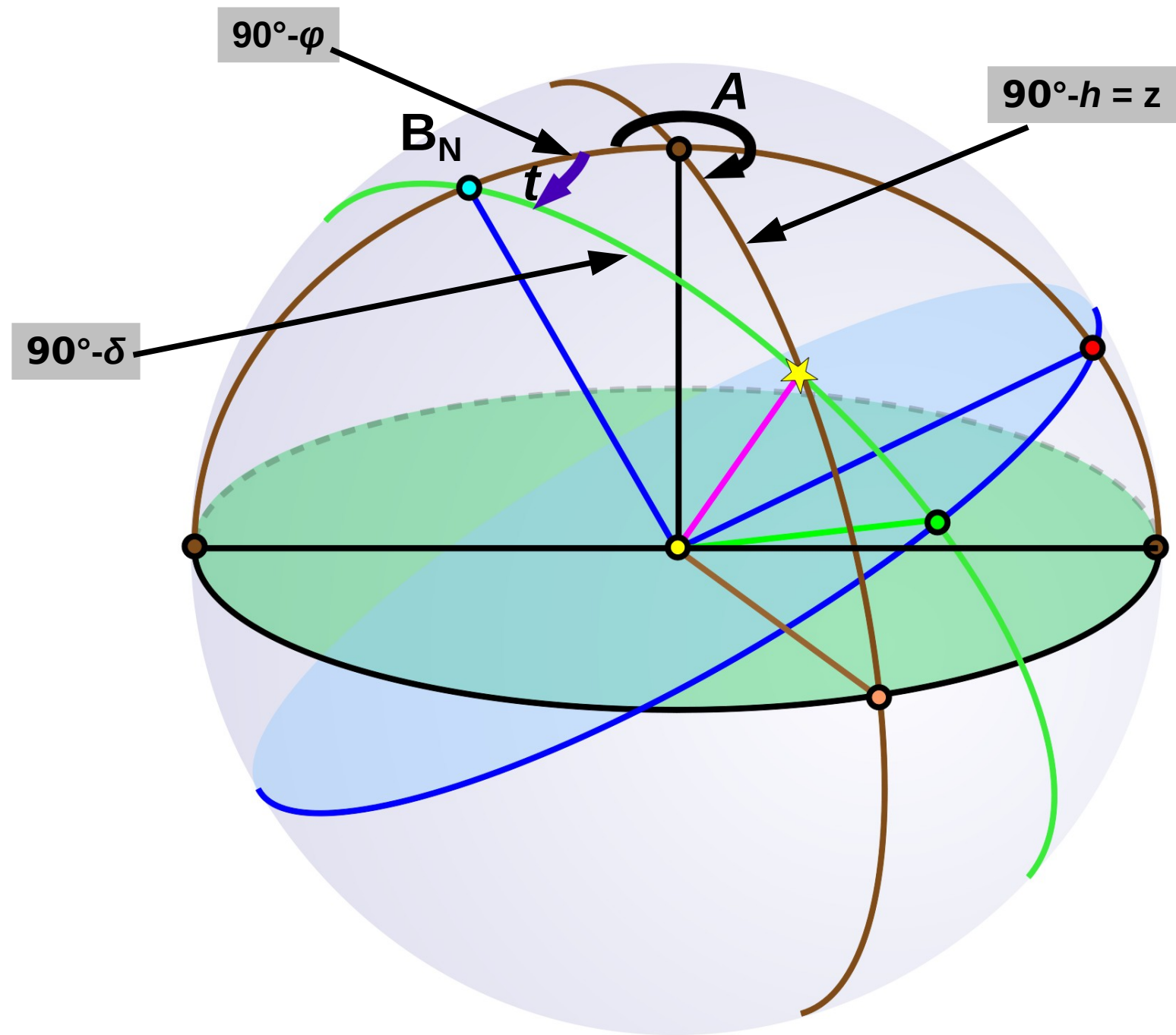


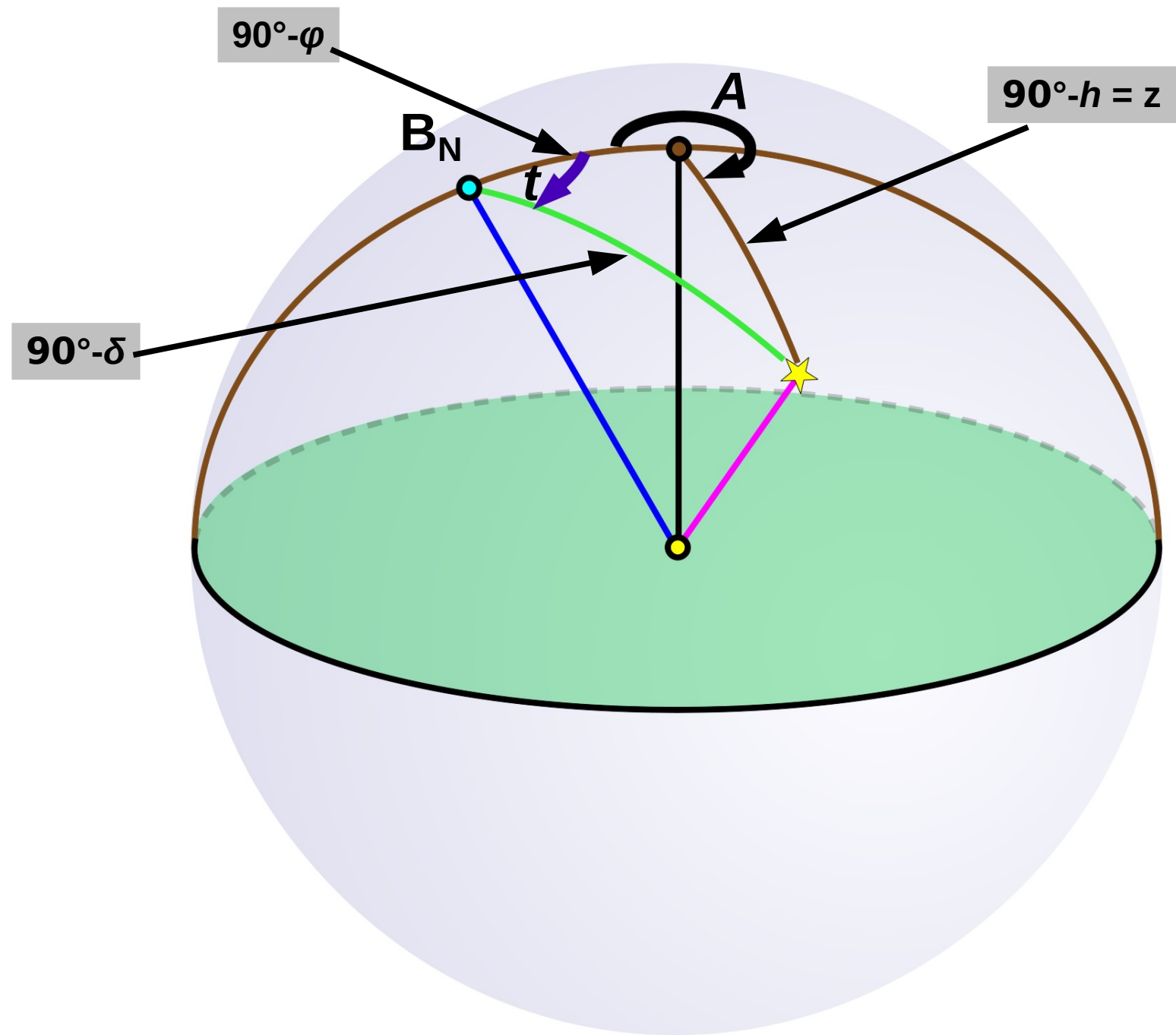


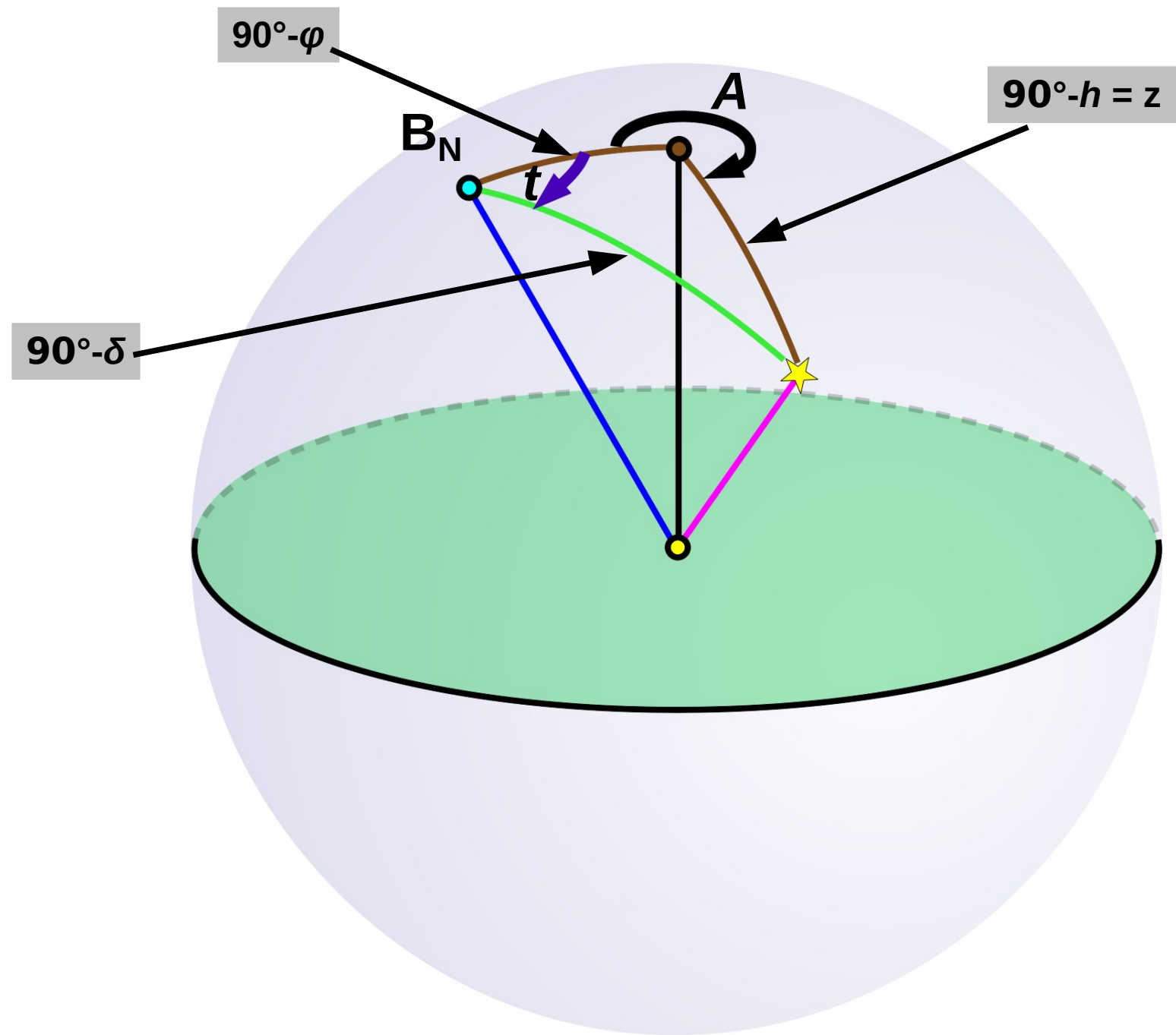


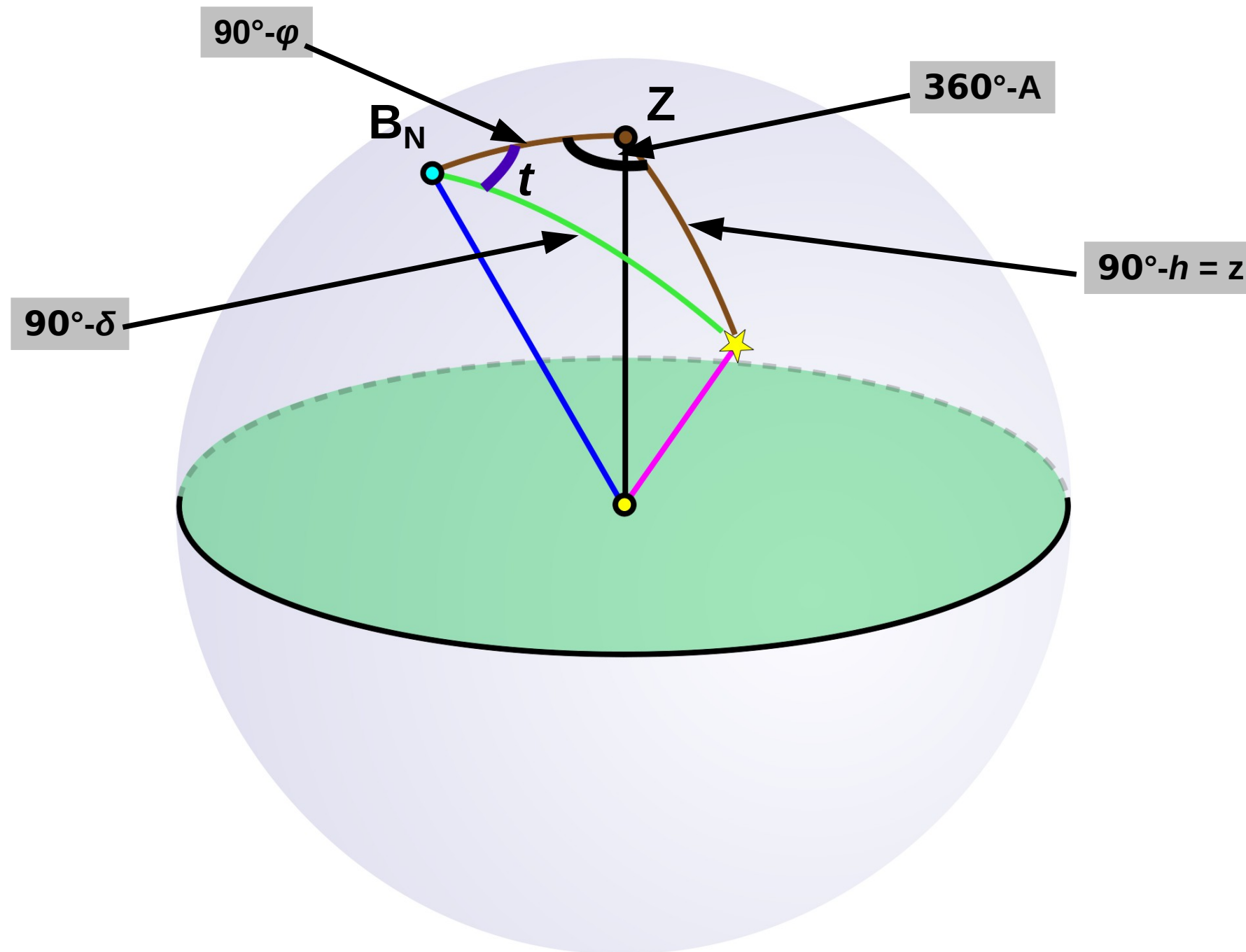


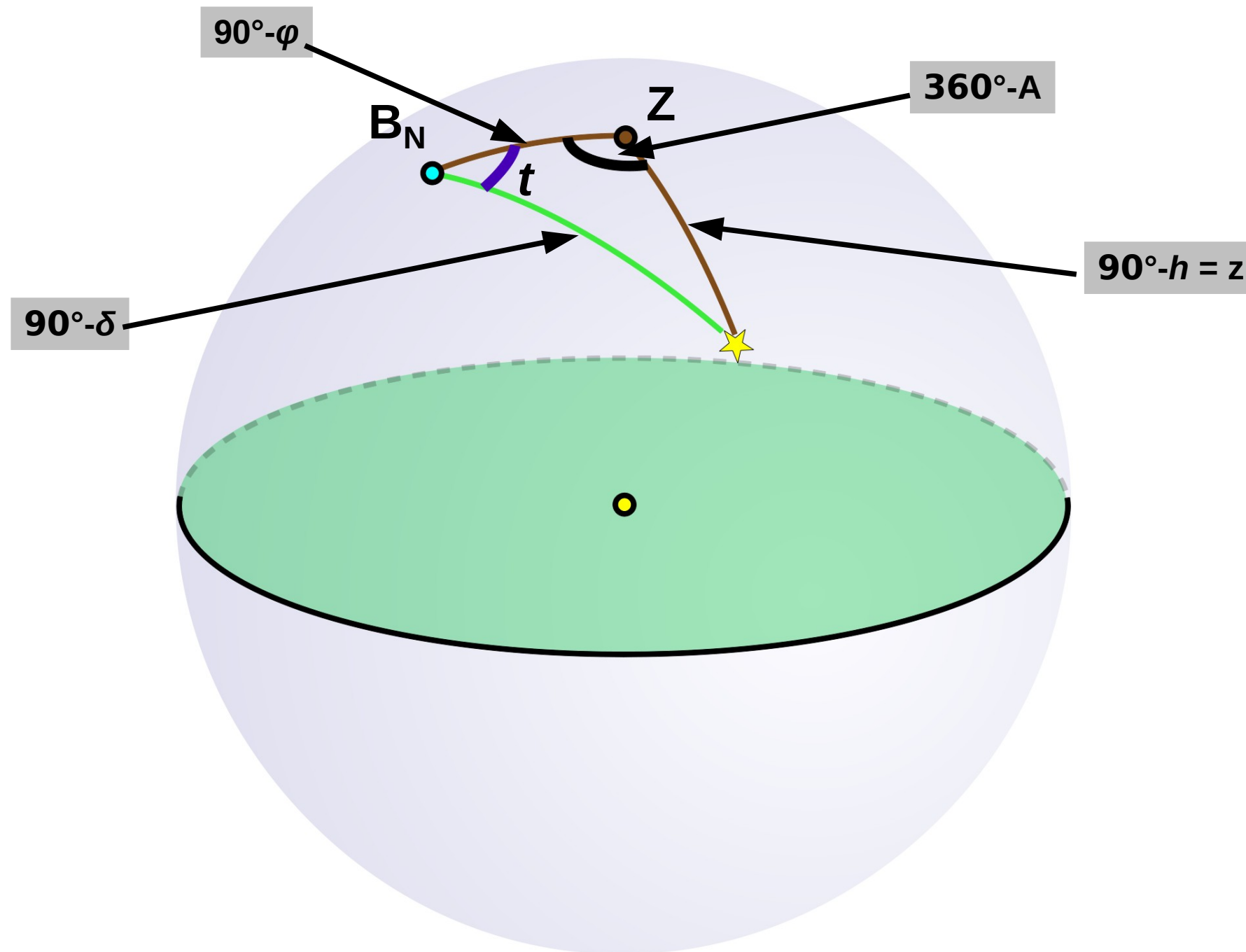


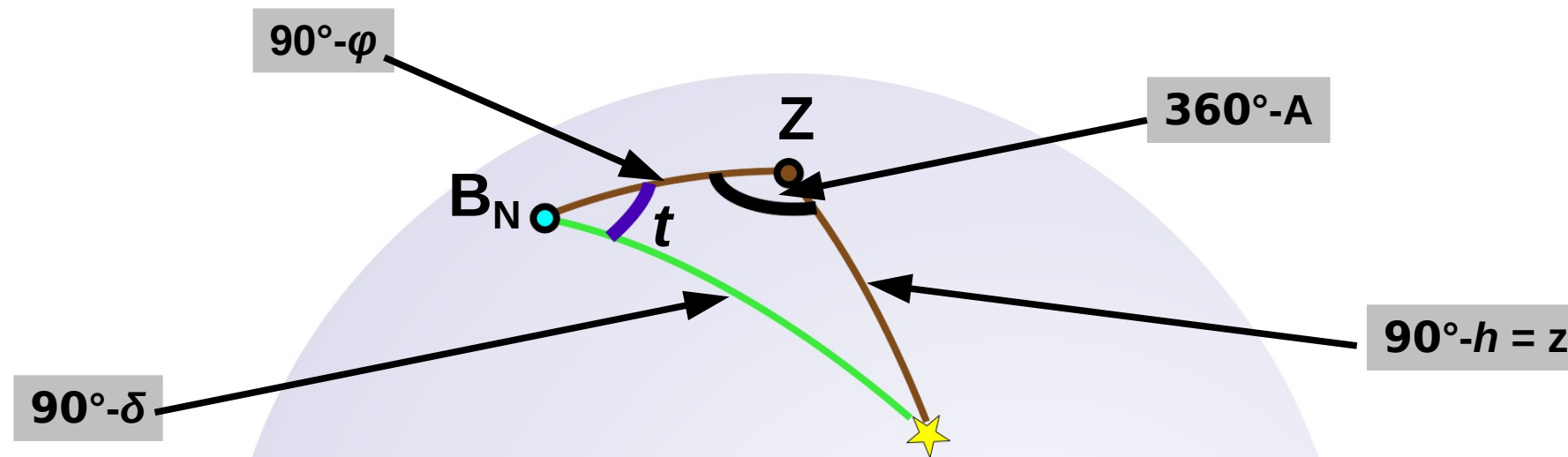






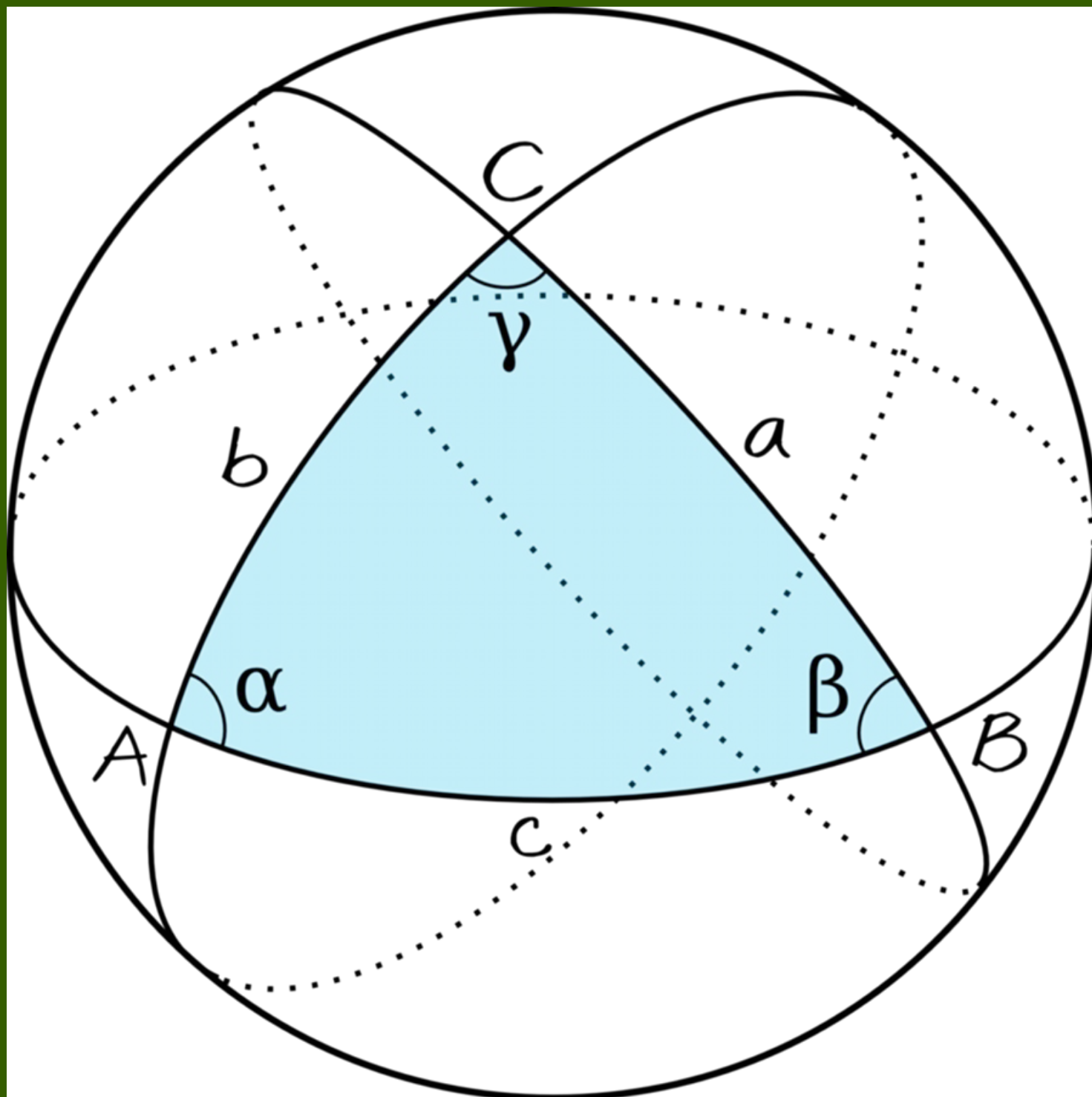






Trójkąt paralaktyczny

czyli związek między układem równikowym godzinny
a układem horyzontalnym

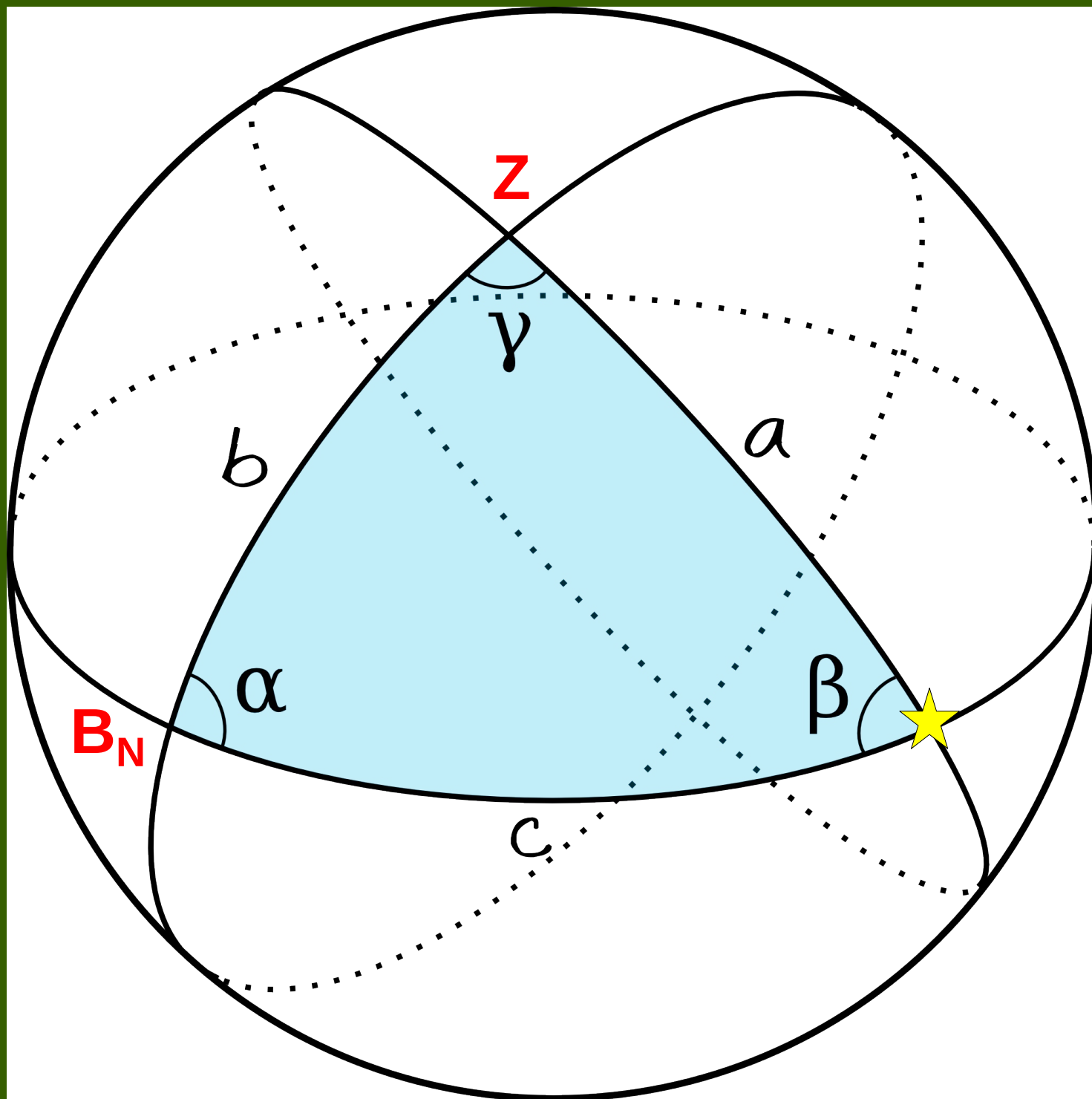


Trójkąt sferyczny

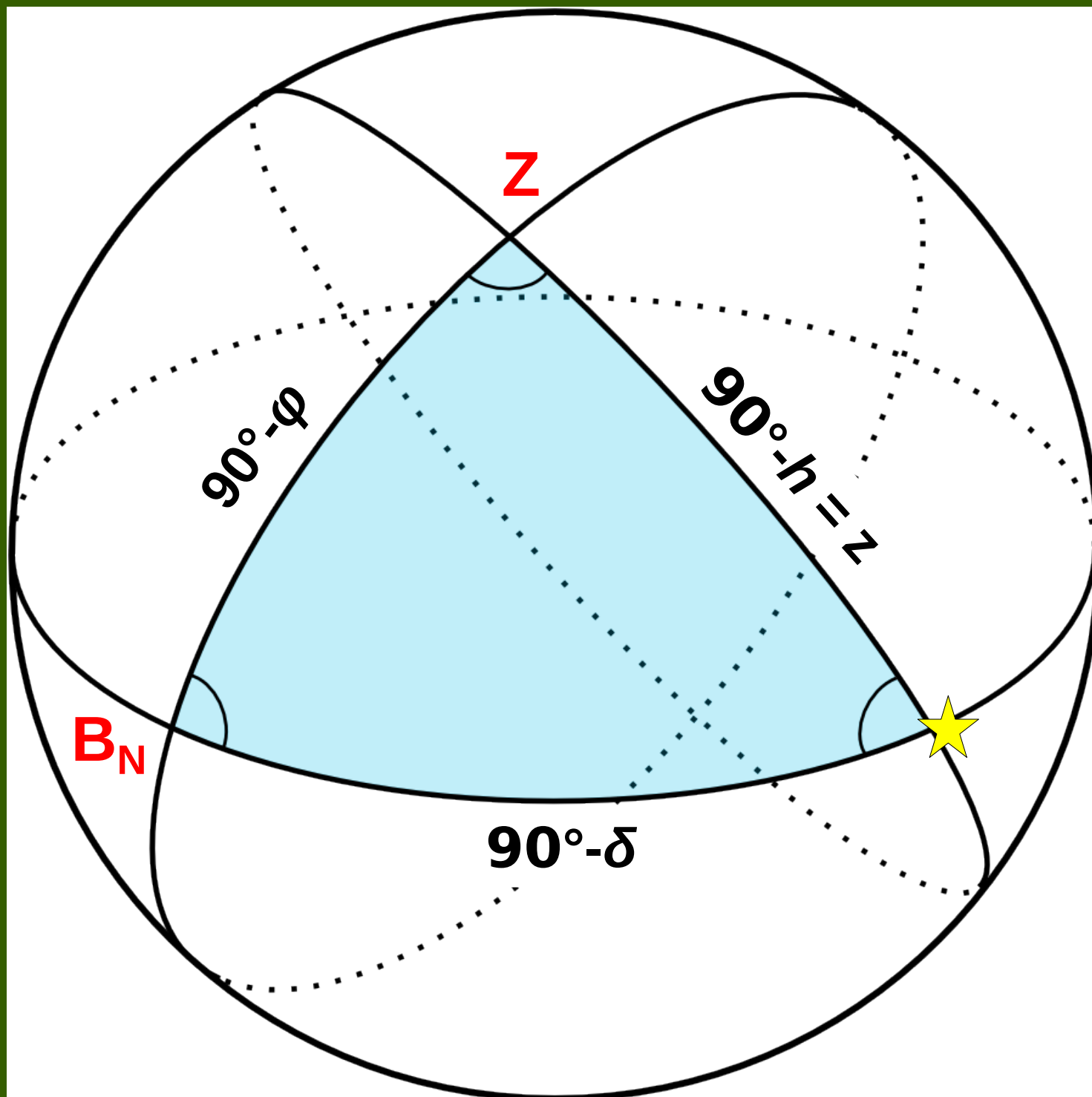
Zarówno
boki jak
i kąty
opisujemy
w mierze
kątovej.

Trójkąt sferyczny eulerowski

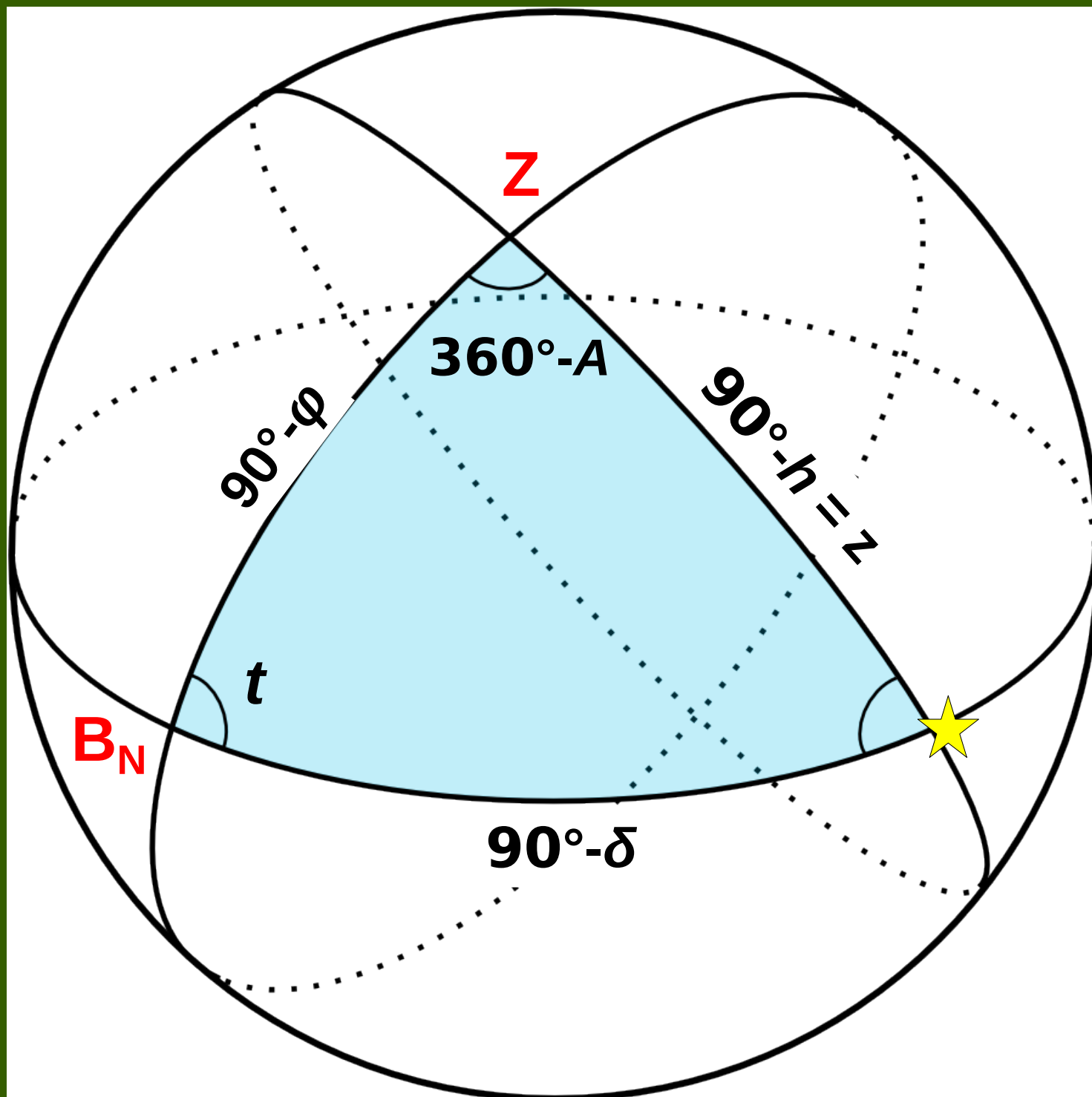
- Warunek: każdy bok jest mniejszy od 180°
- Właściwości:
 - obwód jest mniejszy niż obwód koła wielkiego (2π)
 - suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku
 - suma kątów wewnętrznych mieści się między π i 3π
 - możliwy jest trójkąt o dwóch a nawet trzech kątach prostych



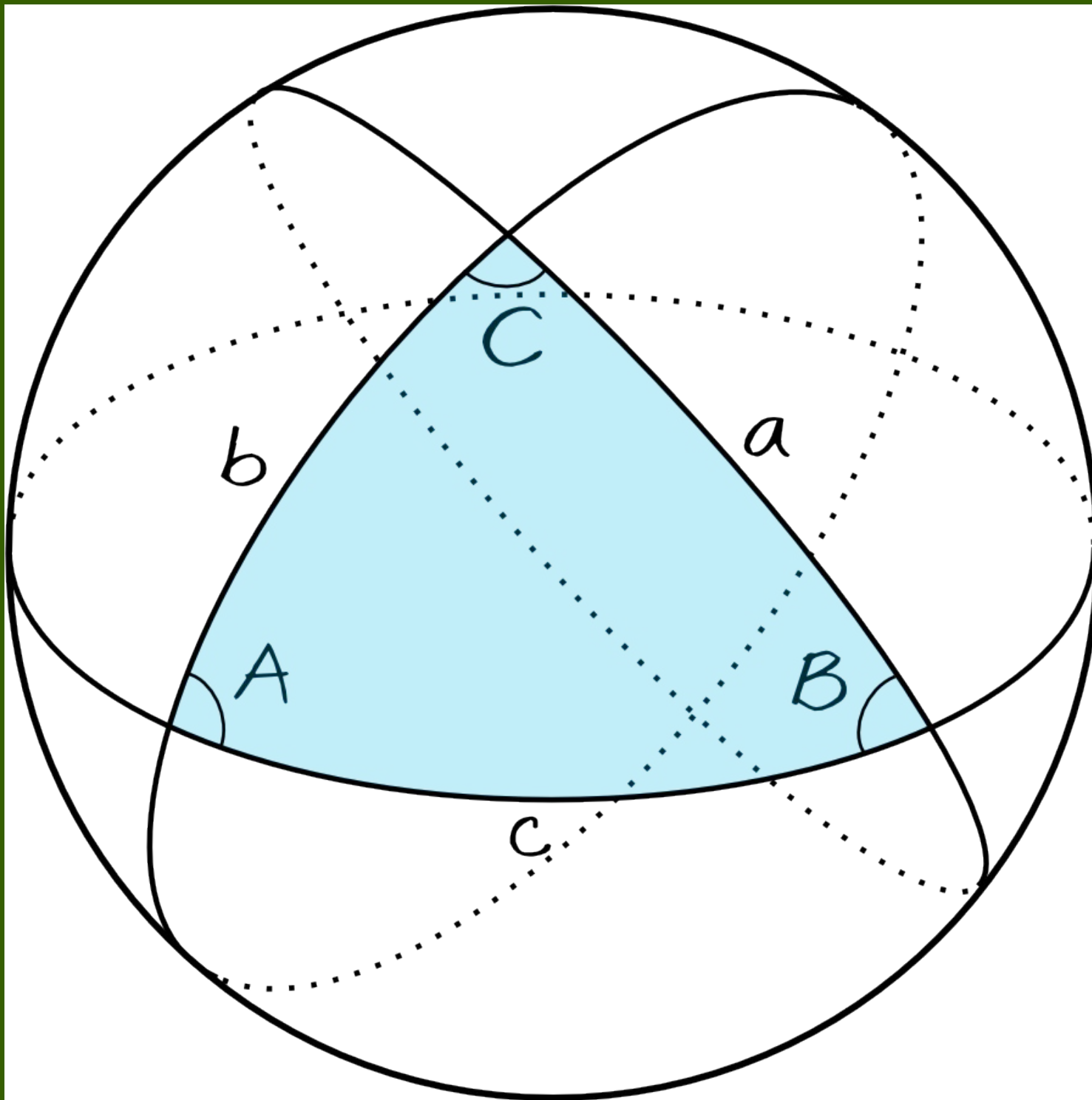
**Trójkąt
paralaktyczny
wierzchołki**



**Trójkąt
paralaktyczny
boki**



**Trójkąt
paralaktyczny
kąty**

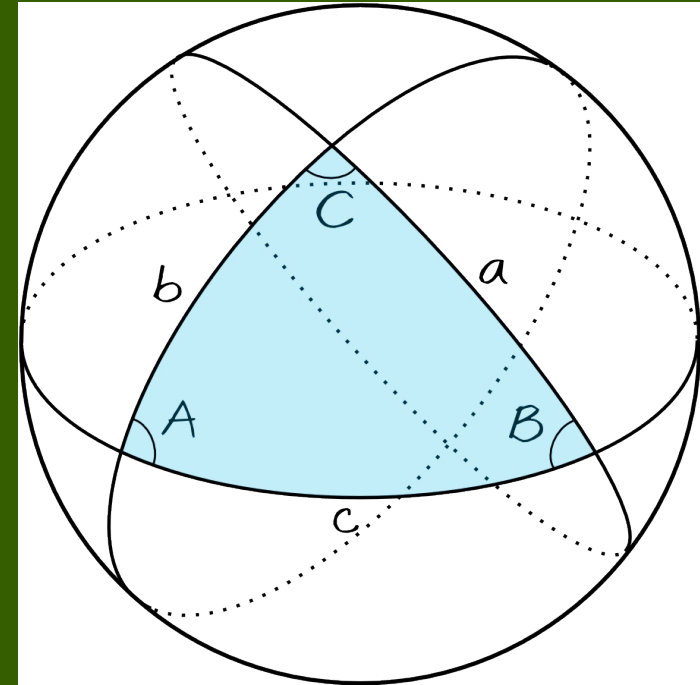


**Trójkąt
sferyczny**

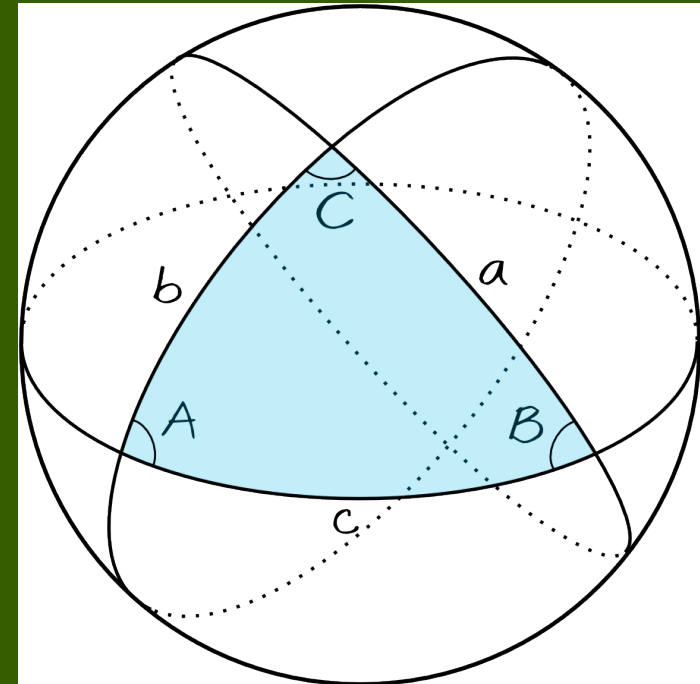
Trygonometria sferyczna

Wzory sinusów:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$



Trygonometria sferyczna



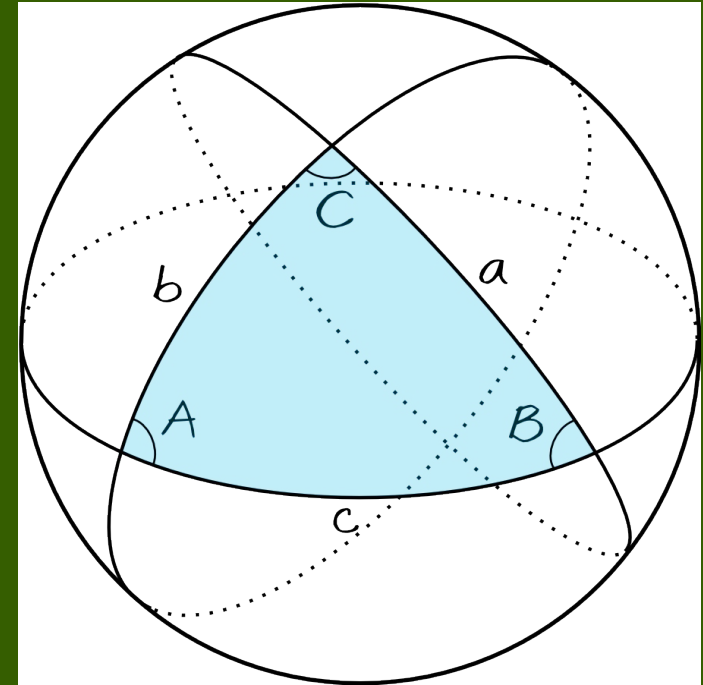
Wzory cosinusów dla boków:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos C$$

Trygonometria sferyczna



Wzory cosinusów dla kątów:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$

$$\cos C = -\cos B \cdot \cos A + \sin B \cdot \sin A \cdot \cos c$$

Trygonometria sferyczna

Wzory pięcioelementowe dla boków:

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

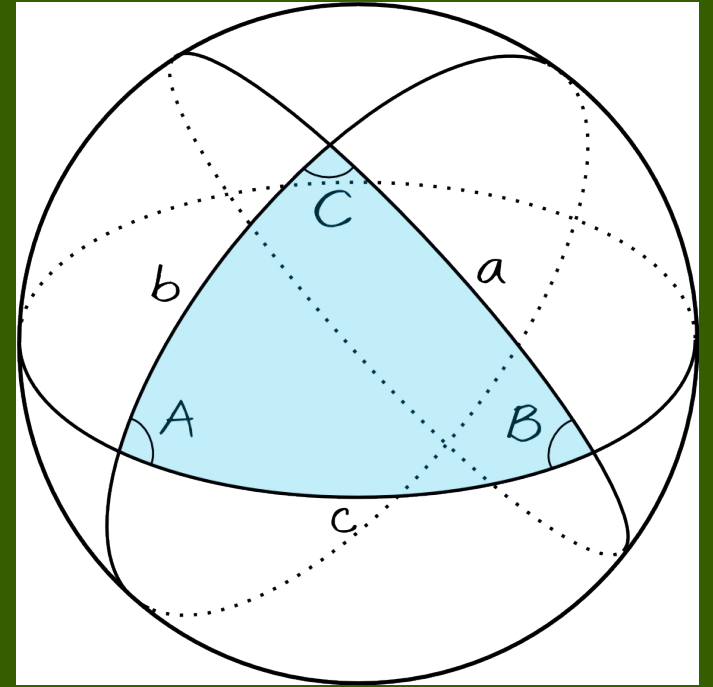
$$\sin b \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B$$

$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C$$

$$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A$$

$$\sin b \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B$$

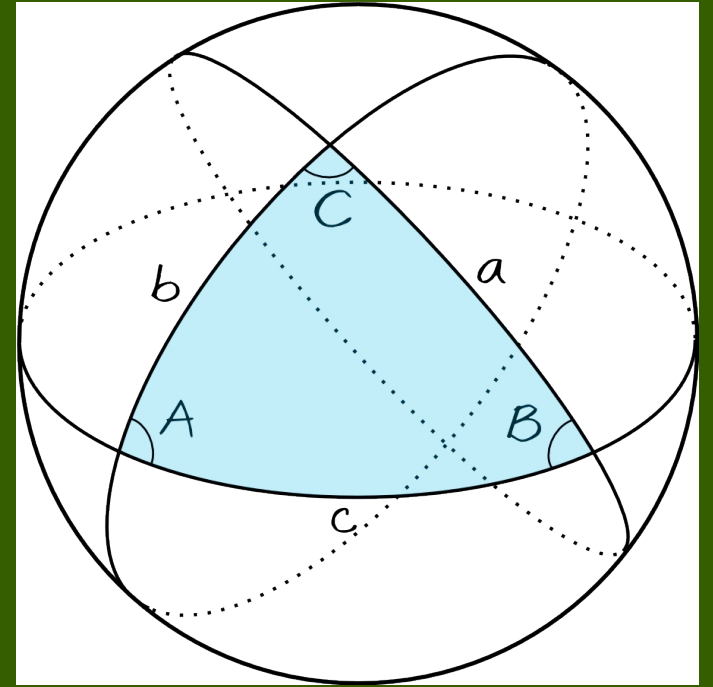
$$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C$$



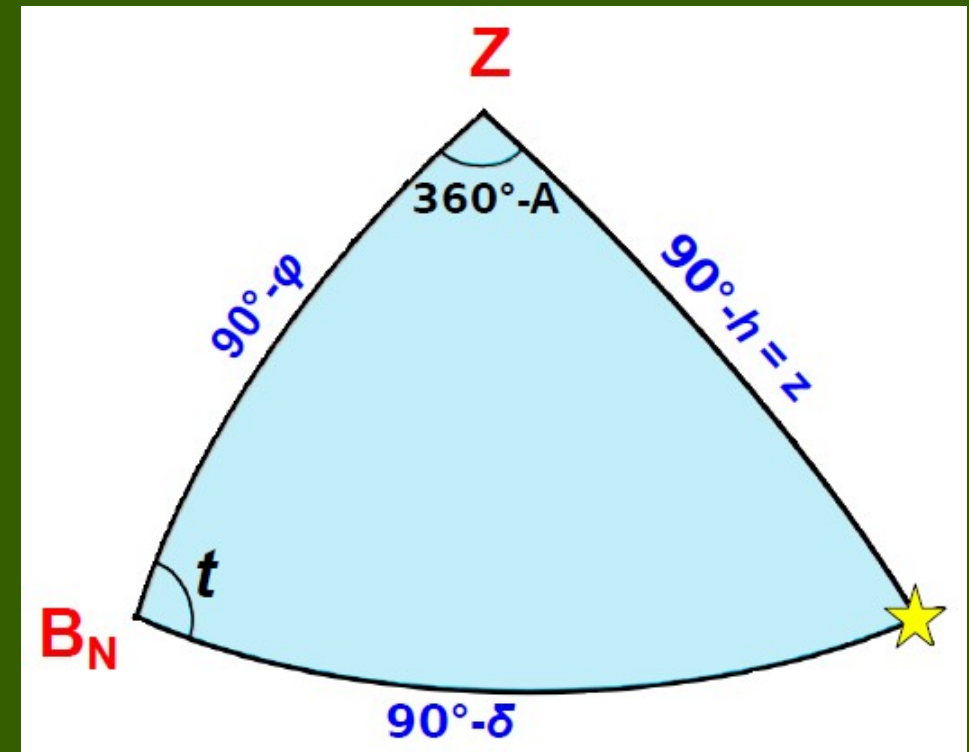
Trygonometria sferyczna

Wzory pięcioelementowe dla kątów:

$$\begin{aligned}\sin A \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a \\ \sin A \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a \\ \sin B \cdot \cos a &= \cos A \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b \\ \sin B \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin A + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b \\ \sin C \cdot \cos a &= \cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c \\ \sin C \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin A + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos c\end{aligned}$$

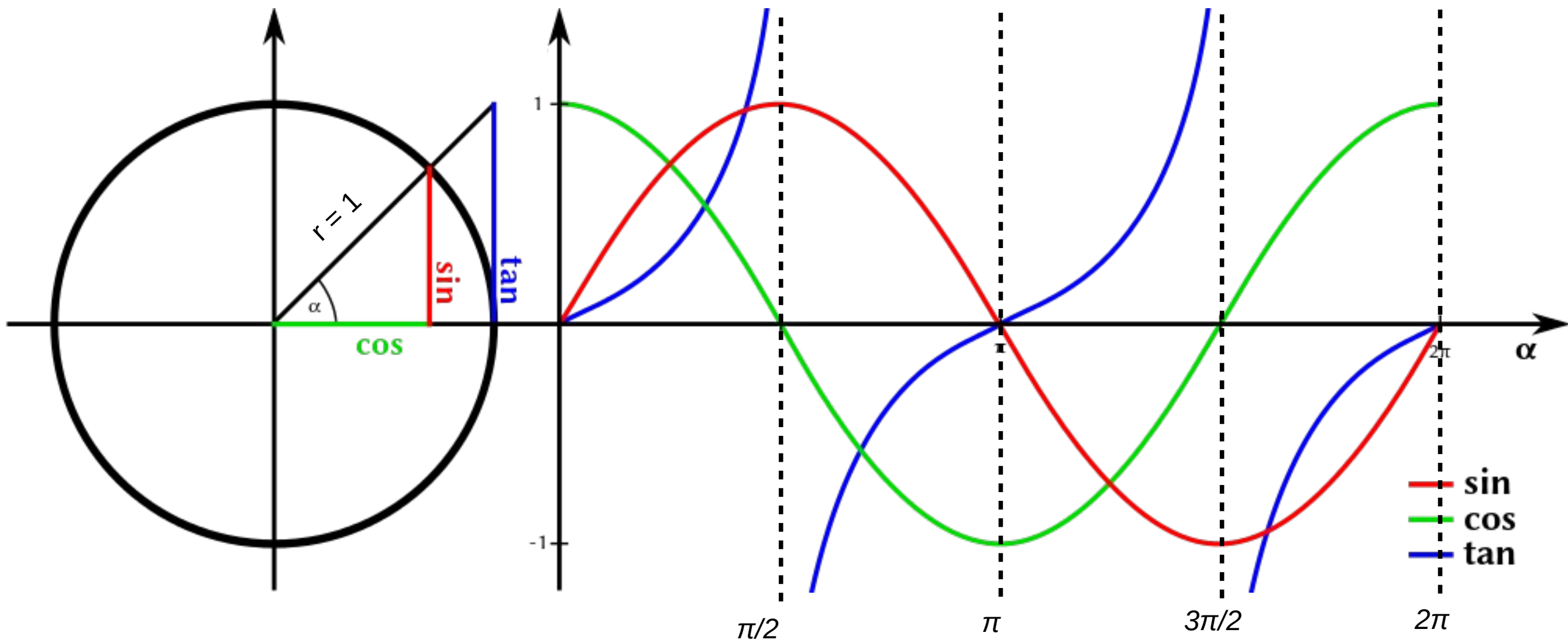


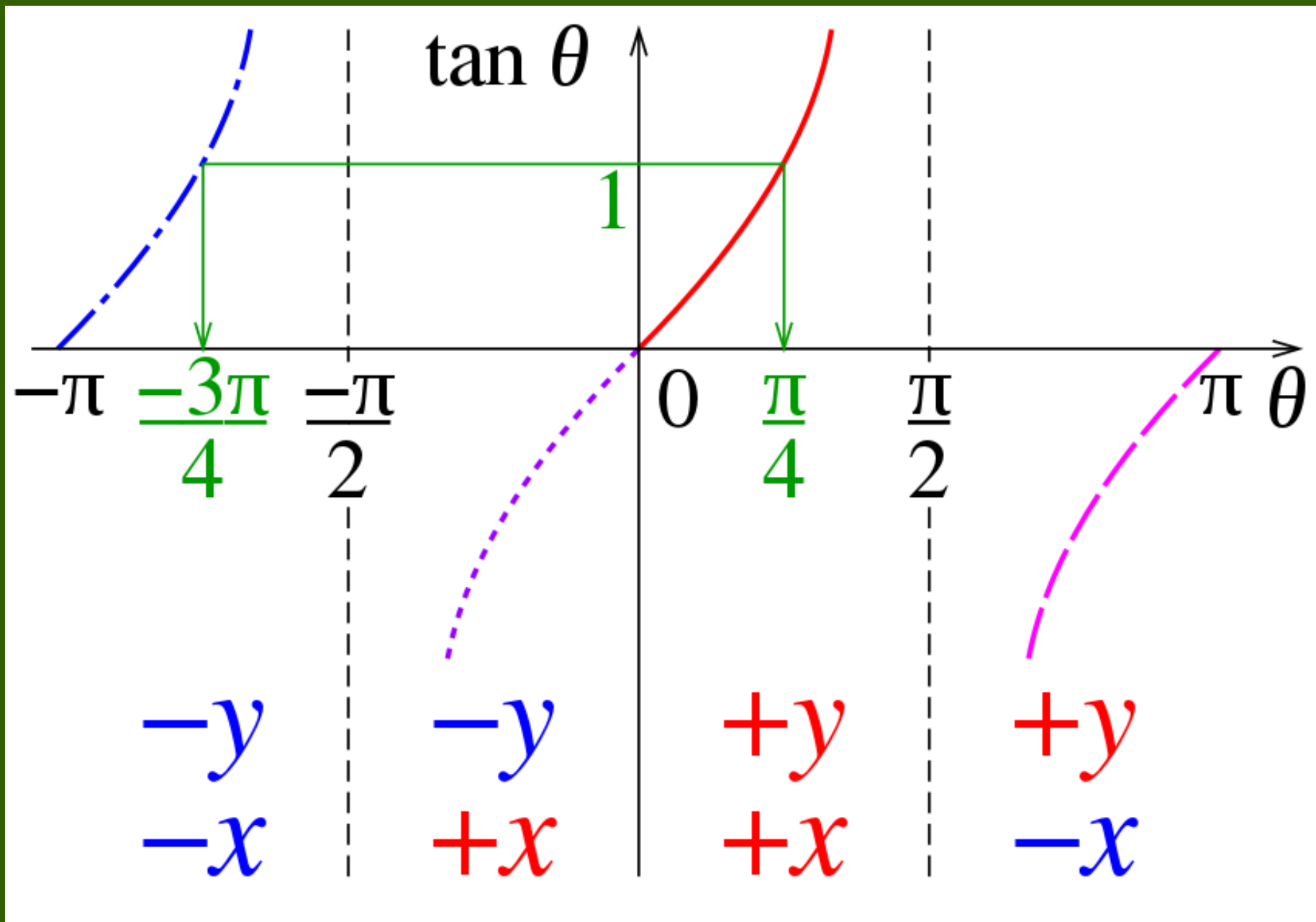
Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym



$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \varphi \sin h + \cos \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \sin h - \sin \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \sin t &= -\cos h \sin A\end{aligned}$$

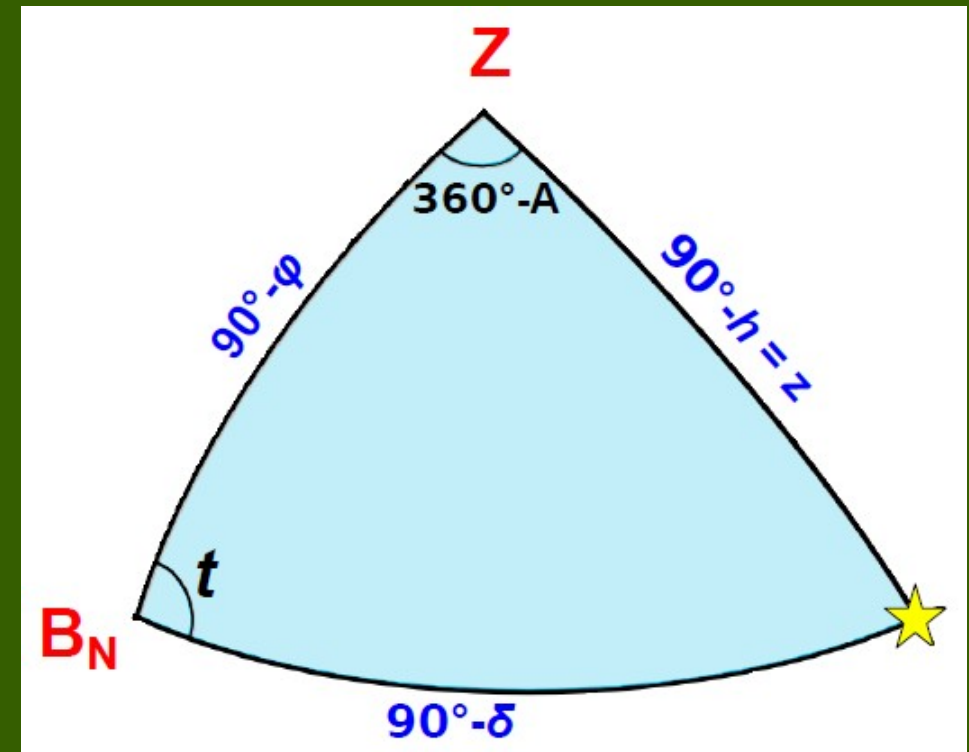
Uwaga! U nas azymut od północy! Podpowiedź: $\sin(180+\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$





$\theta = \text{atan2}(y,x) = \text{atan2}(z \cdot \sin \theta, z \cdot \cos \theta),$
 z – dowolna stała dodatnia

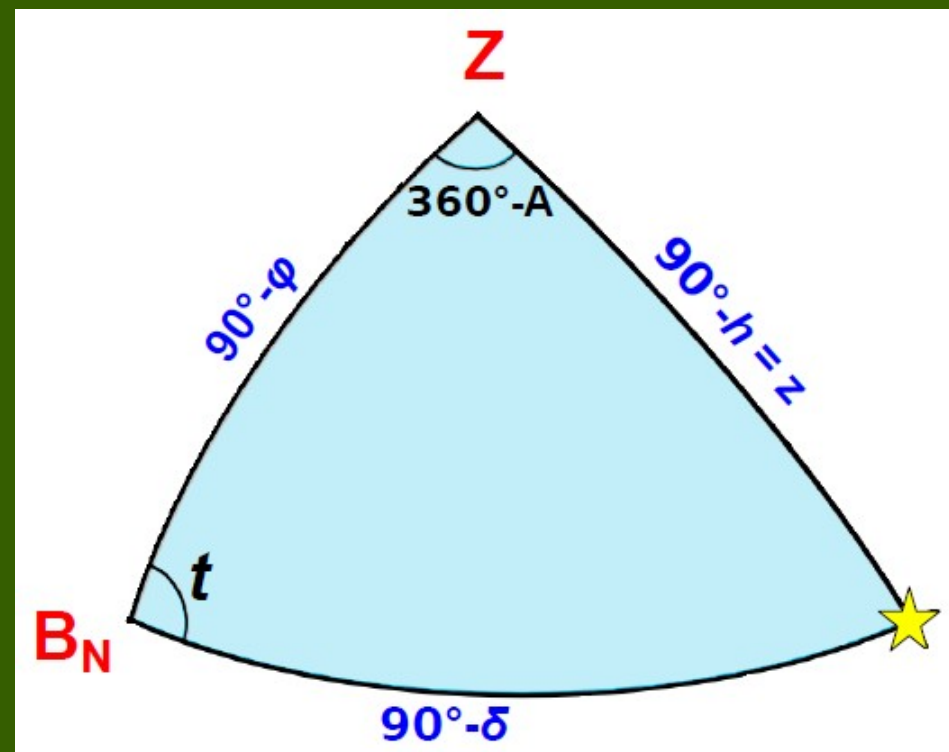
Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym



$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \varphi \sin h + \cos \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \sin h - \sin \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \sin t &= -\cos h \sin A\end{aligned}$$

Uwaga! U nas azymut od północy! Podpowiedź: $\sin(180+\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$

Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym



$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ \cos h \cos A &= \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t \\ \cos h \sin A &= -\cos \delta \sin t\end{aligned}$$

Uwaga! U nas azymut od północy! Podpowiedź: $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$

Związki układu horyzontalnego z równikowym godzinnym

Przez $r_{\alpha,\beta}$ oznaczamy wersor, którego składowe x , y i z wyliczymy ze wzorów:

$$x = \cos \alpha \cos \beta$$

$$y = \sin \alpha \cos \beta$$

$$z = \sin \beta$$

Operatory obrotu:

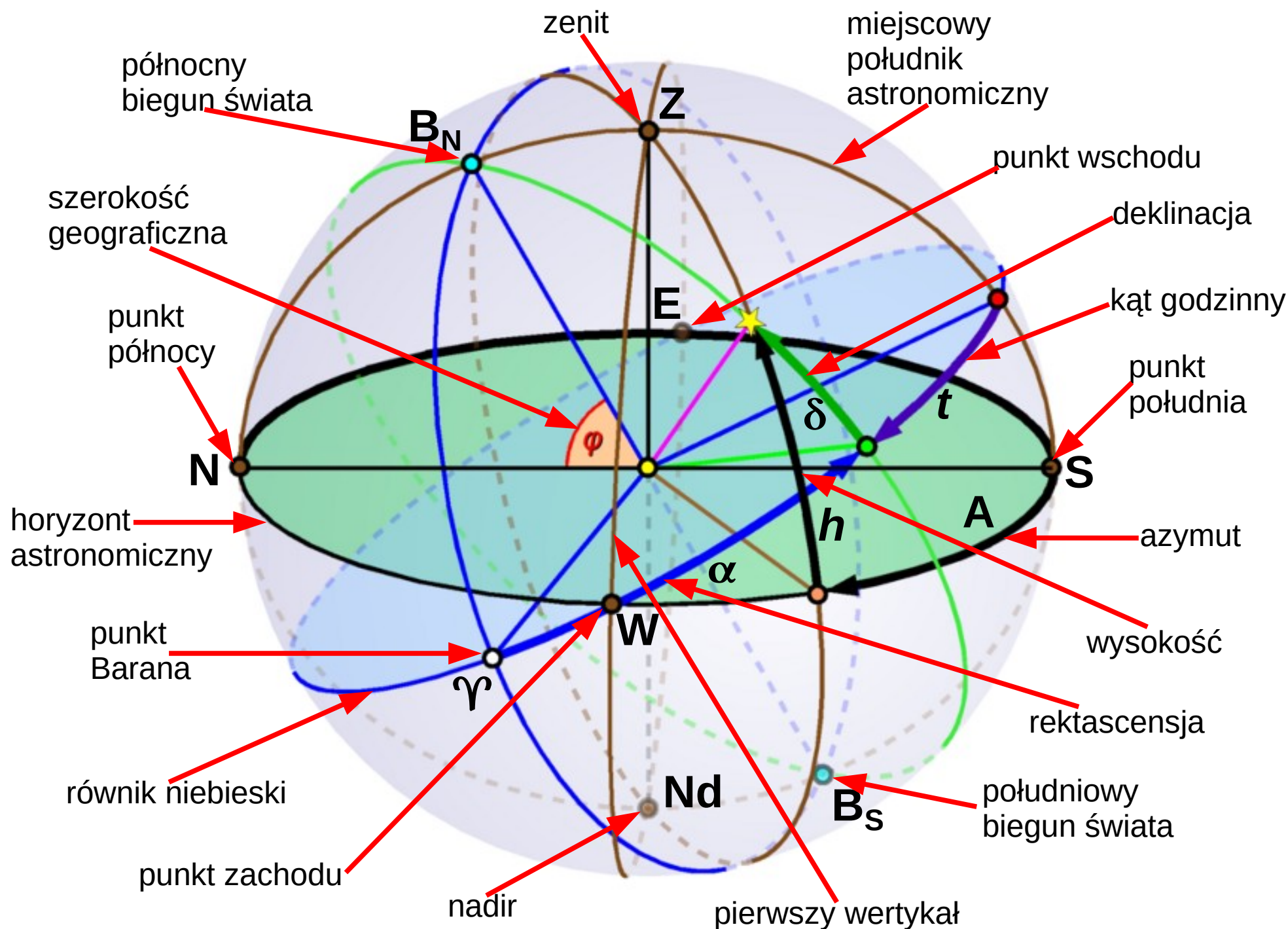
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

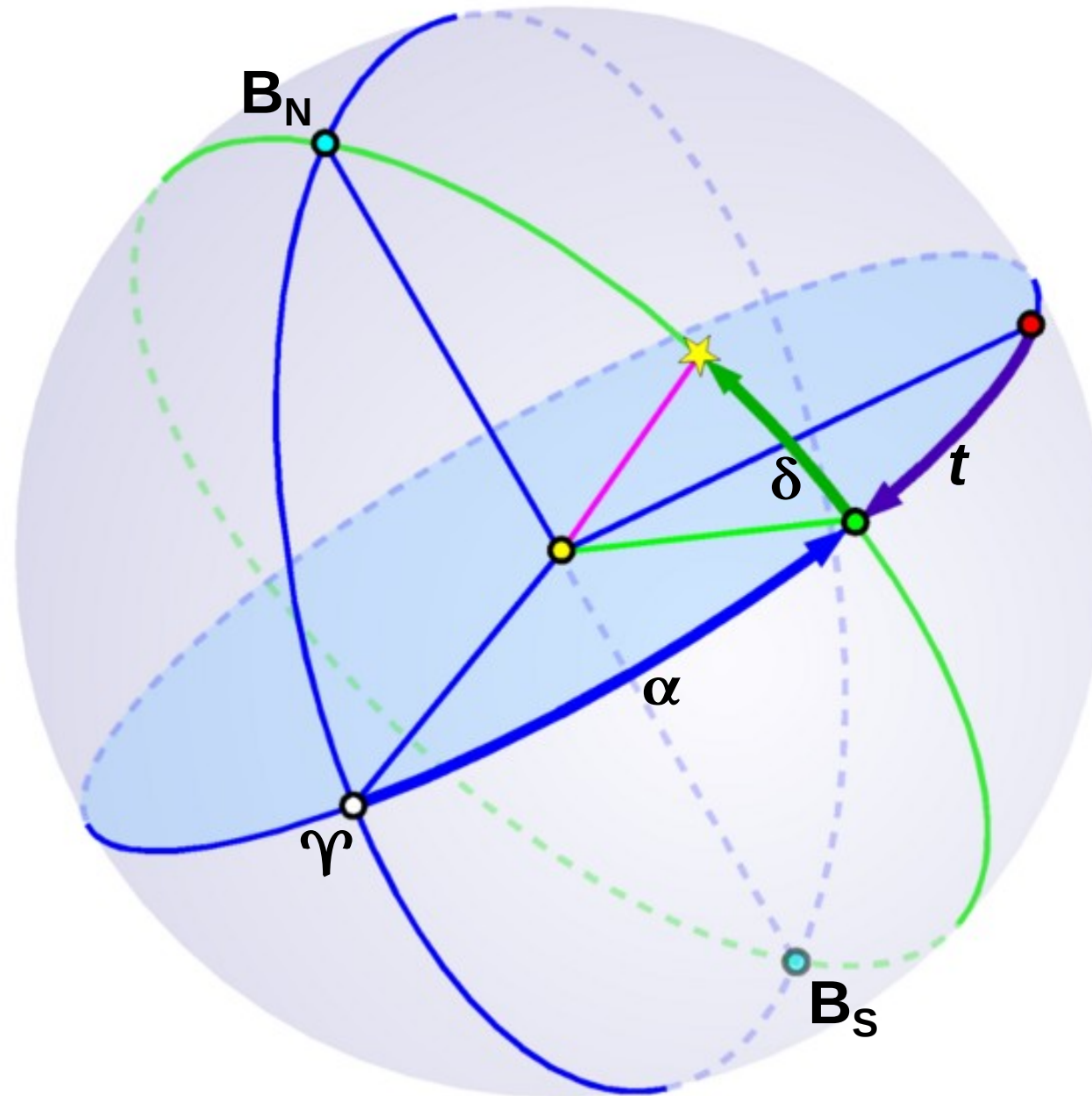
$$r_{t,\delta} = R_y(\varphi - 90^\circ) R_z(180^\circ) r_{A,h}$$

$$r_{A,h} = R_z(-180^\circ) R_y(90^\circ - \varphi) r_{t,\delta}$$

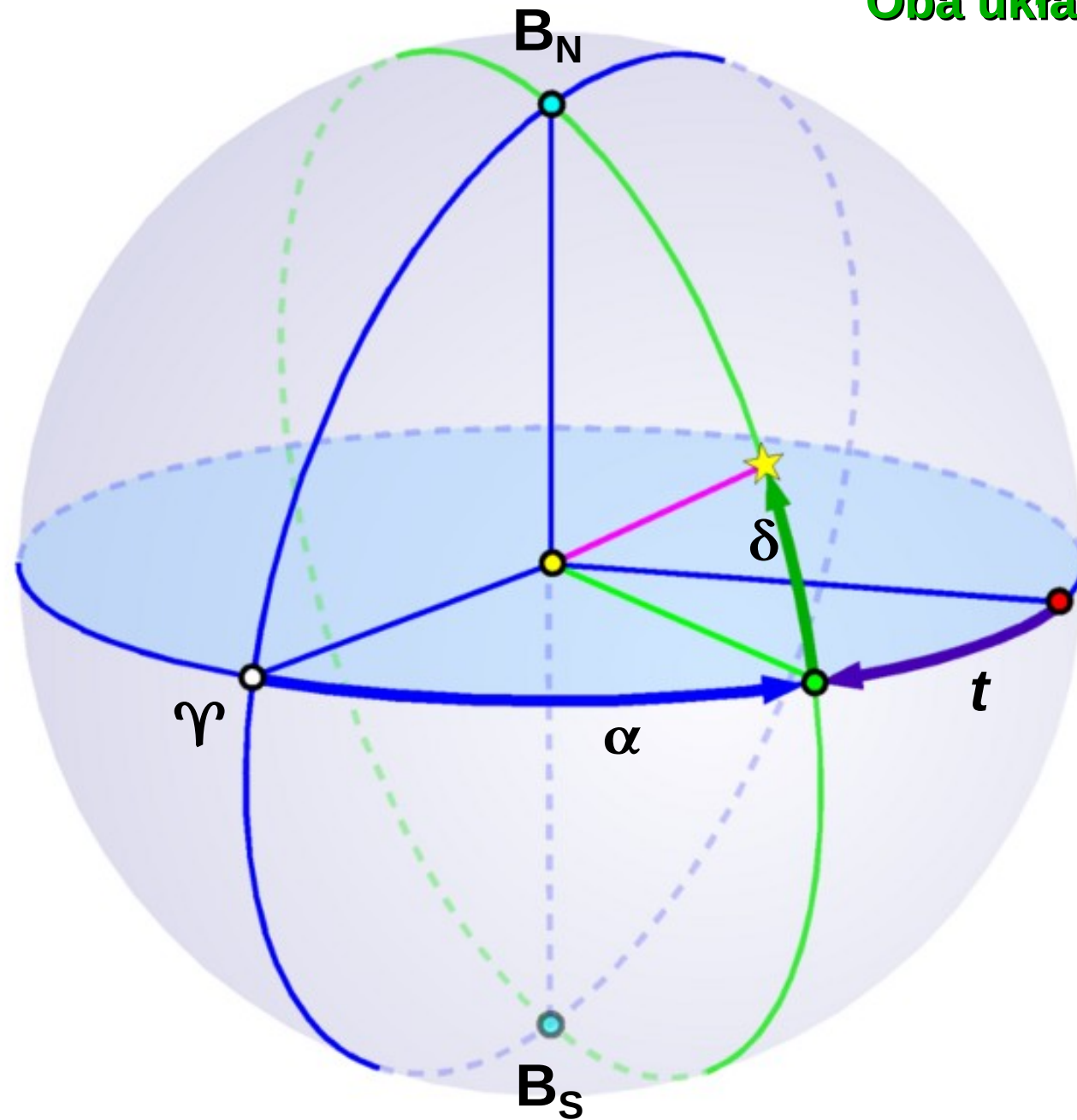


**Oba układy
równikowe
oraz układ
horyzontalny**

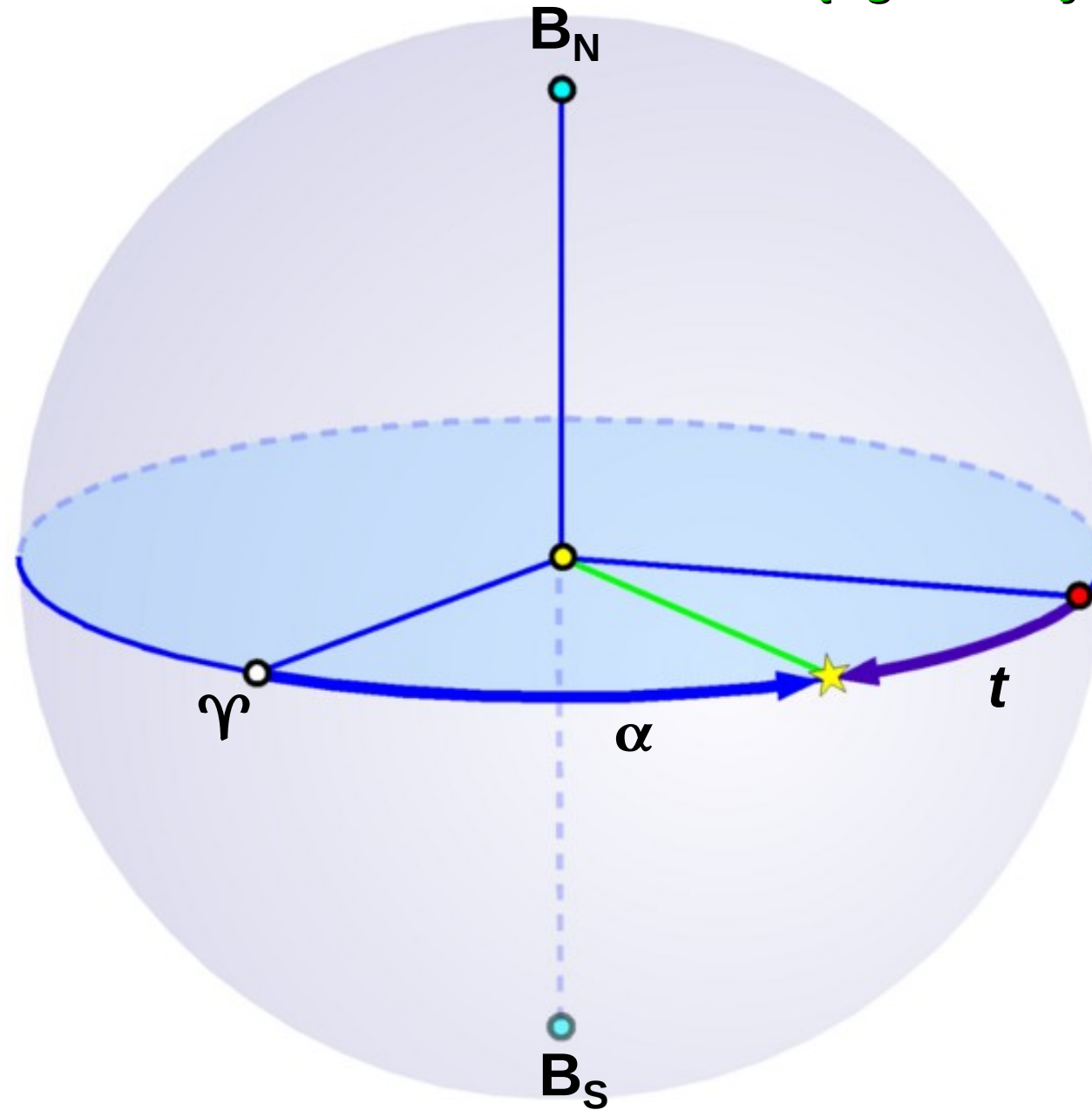
Oba układy równikowe



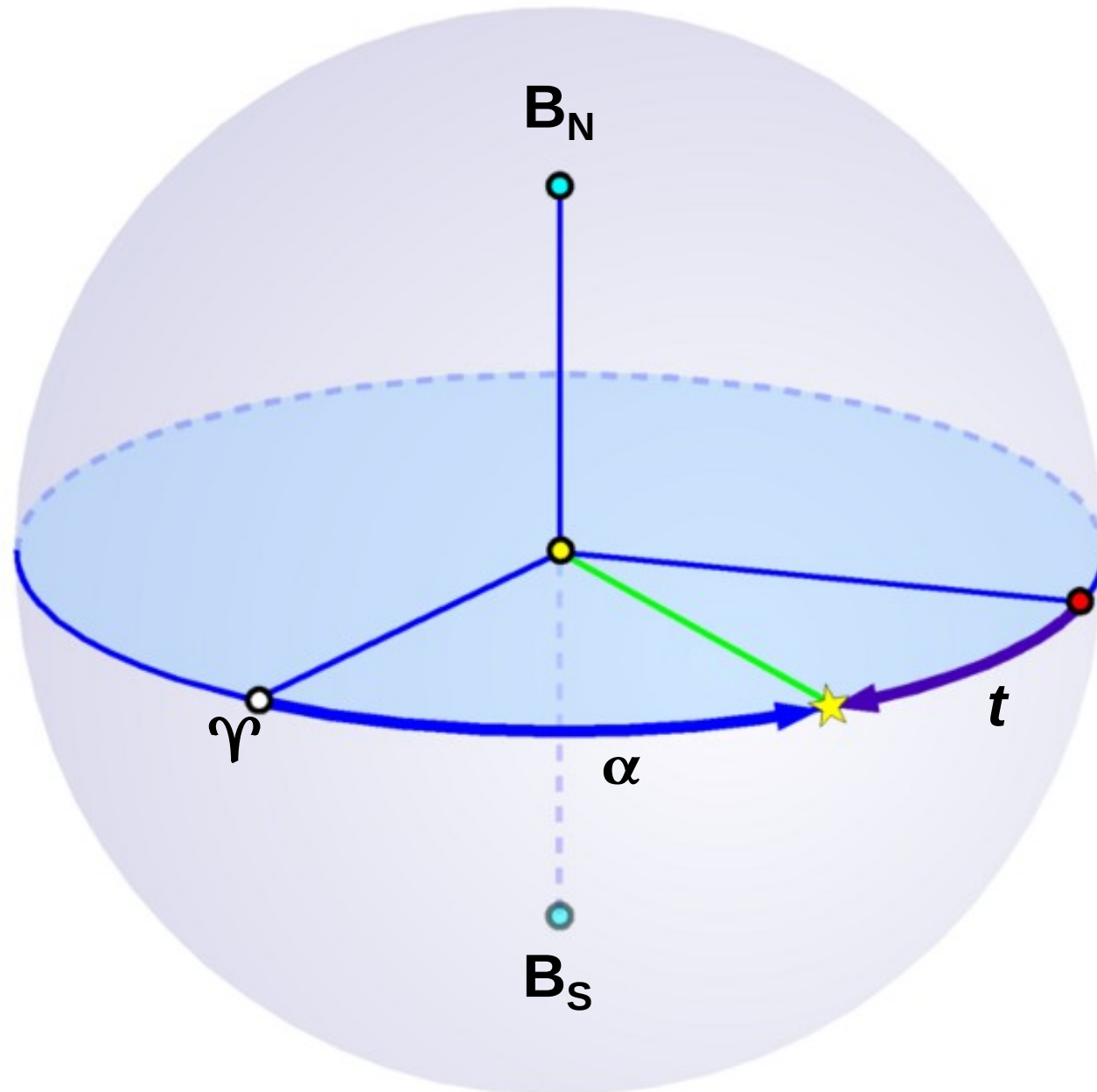
Oba układy równikowe



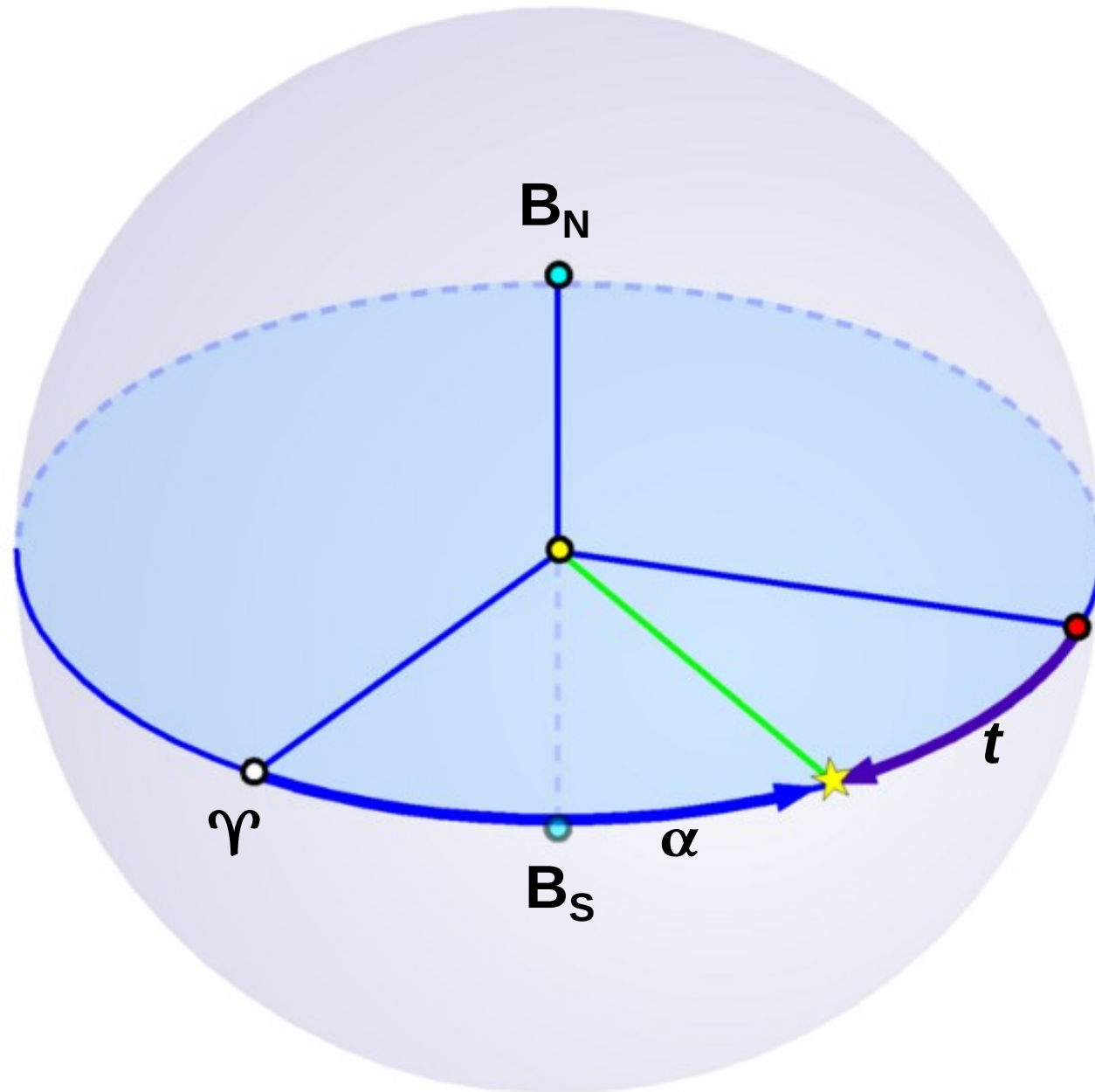
kąt godzinny i rektascensja



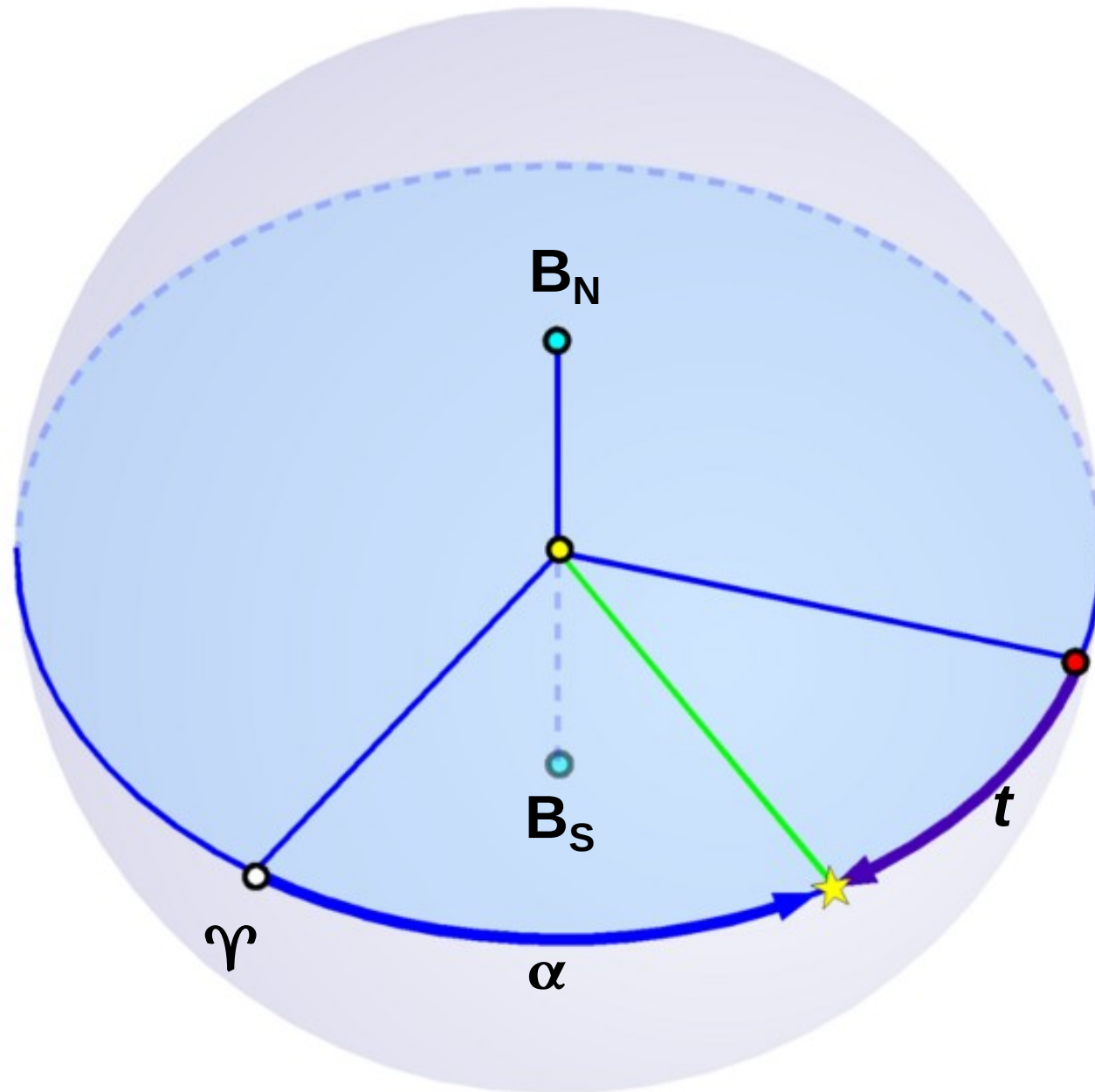
kąt godzinny i rektascensja



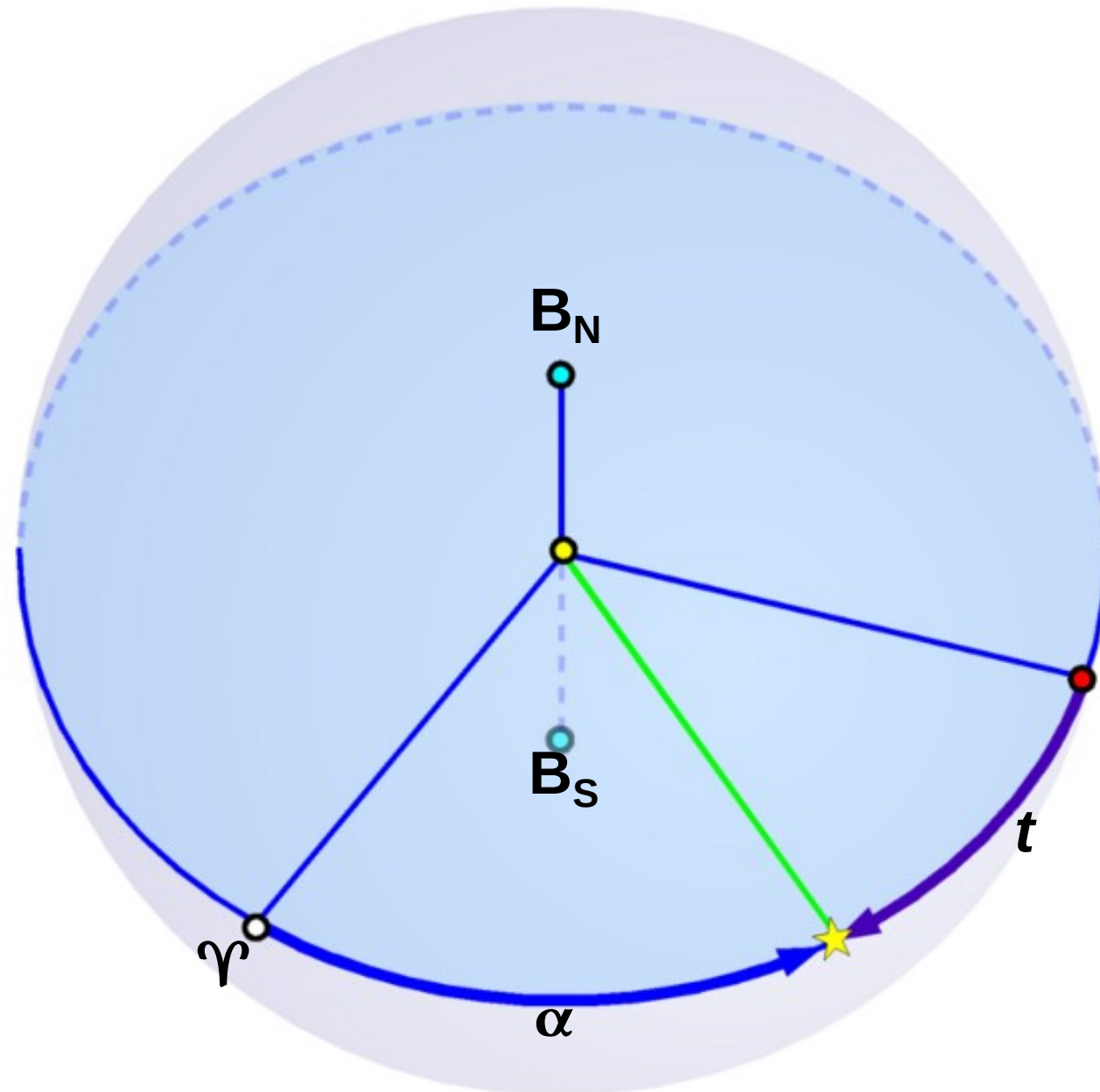
kąt godzinny i rektascensja



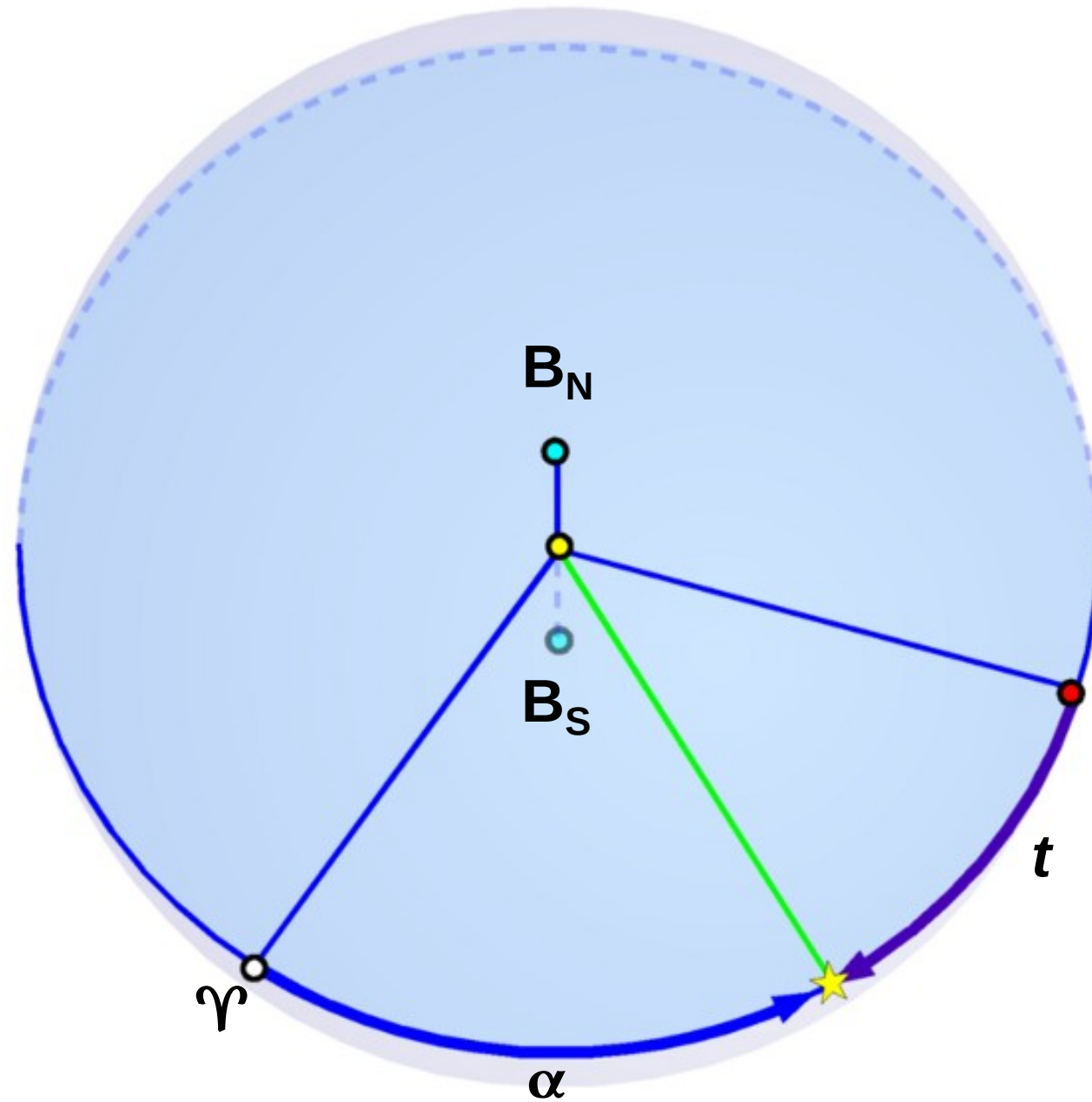
kąt godzinny i rektascensja



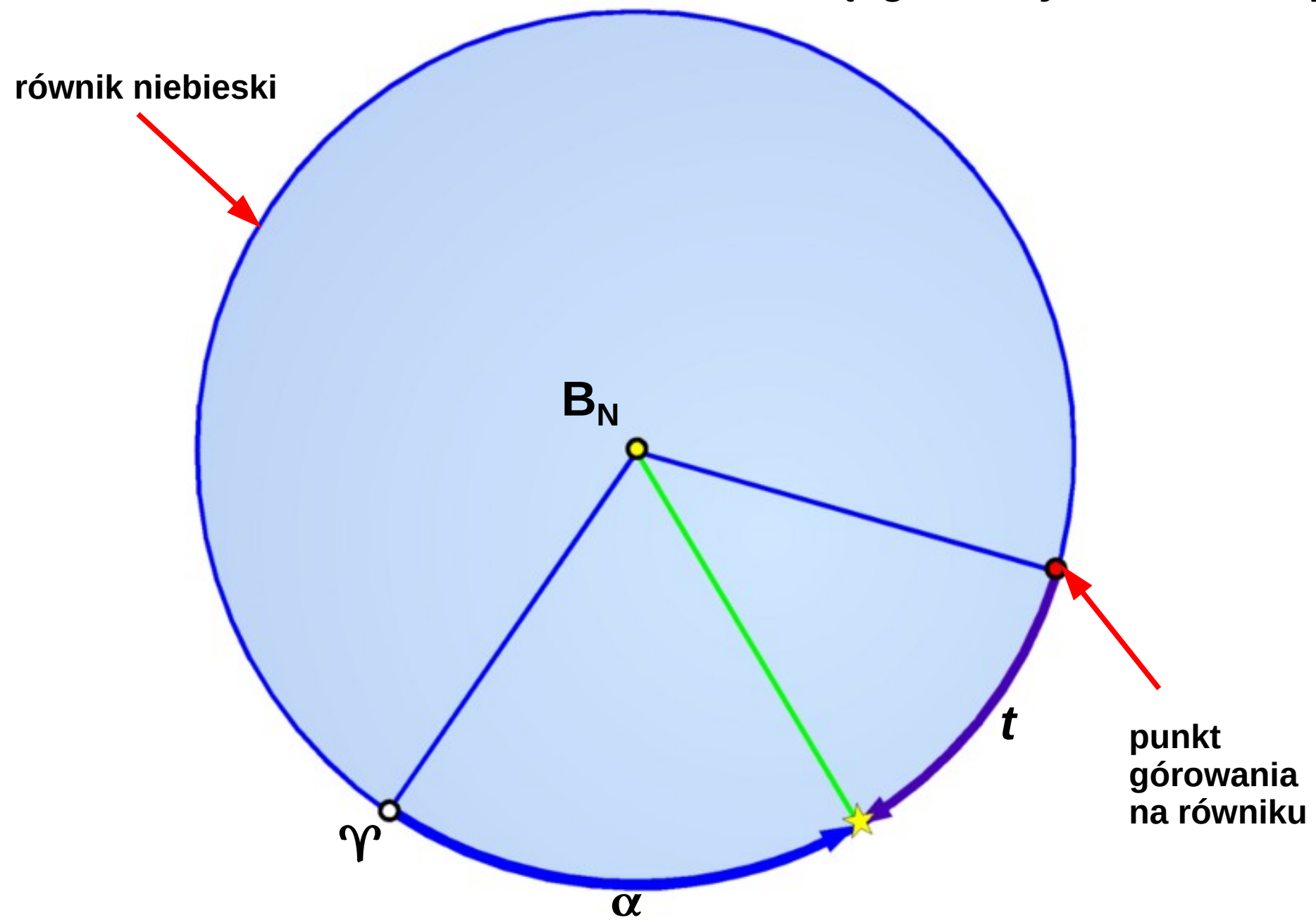
kąt godzinny i rektascensja



kąt godzinny i rektascensja

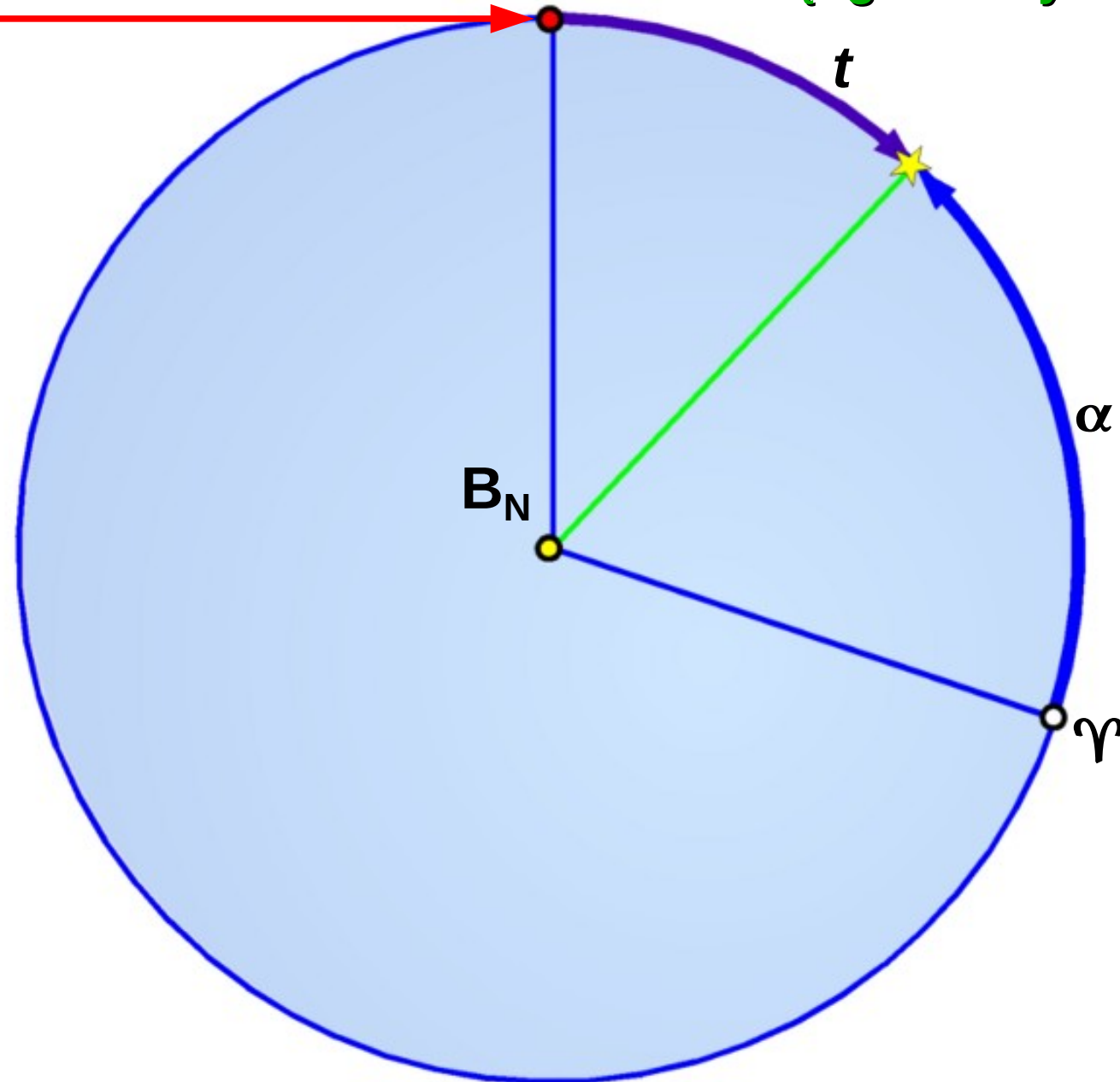


kąt godzinny i rektascensja



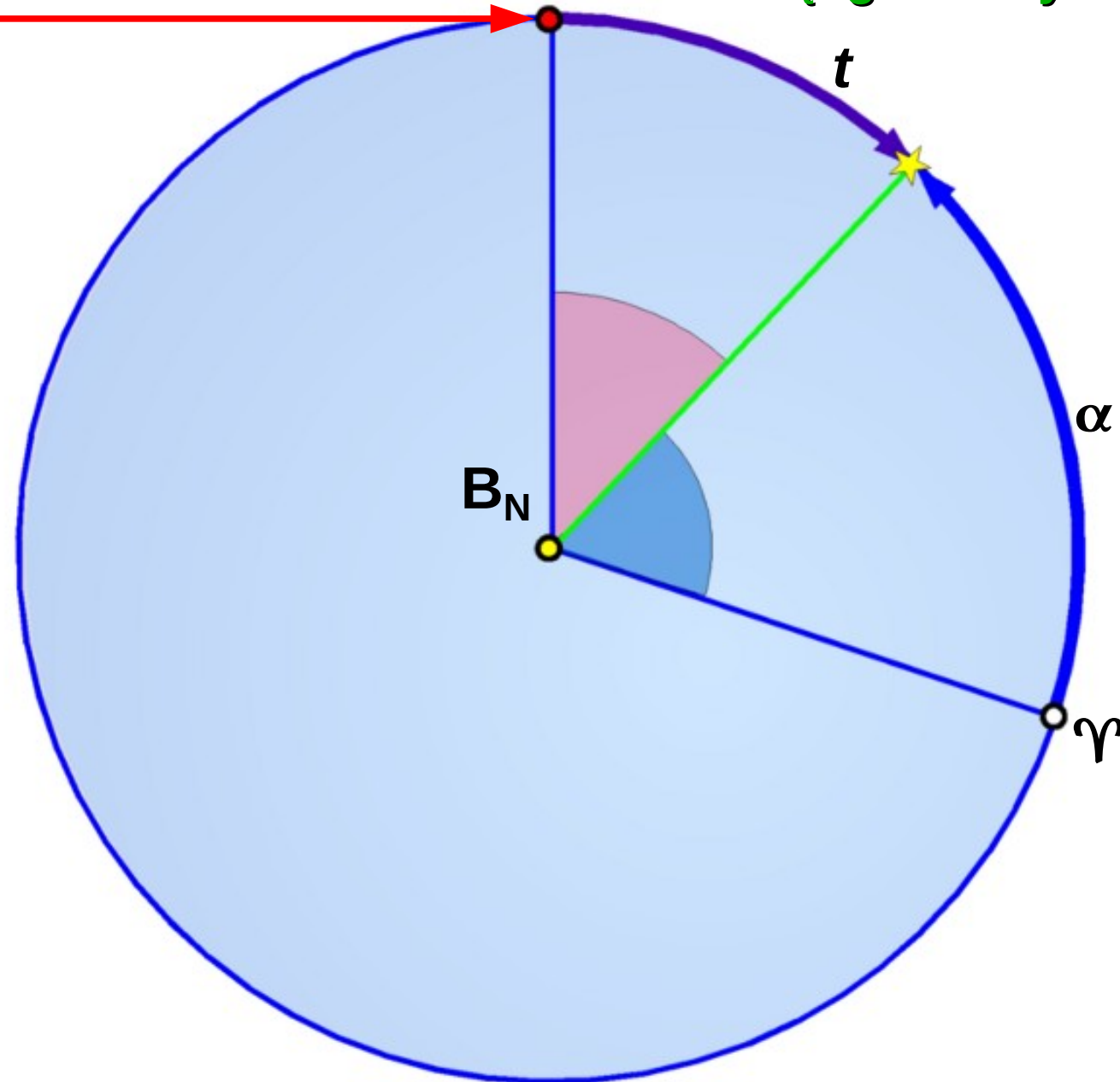
punkt
górowania
na równiku

kąt godzinny i rektascensja



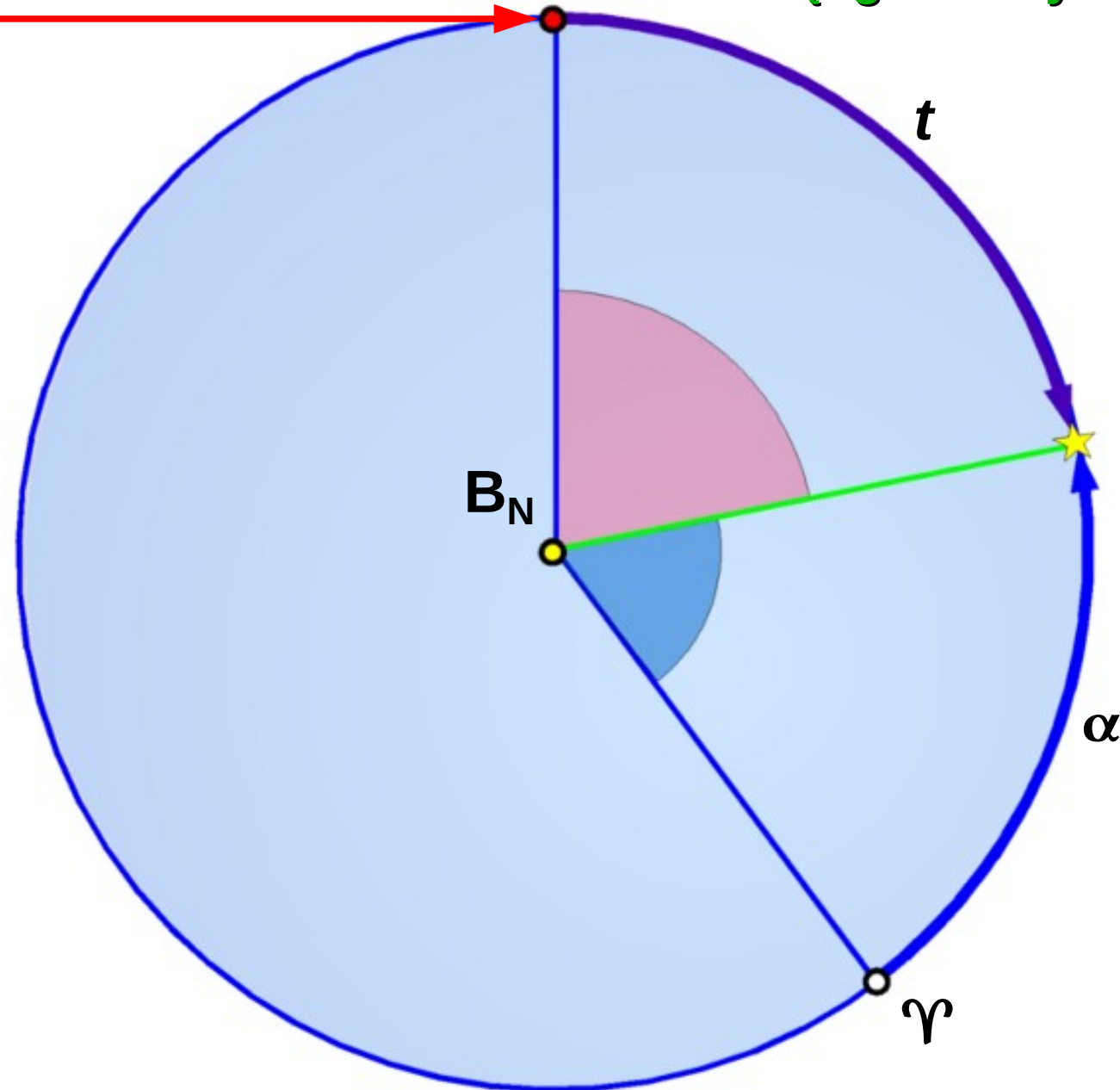
punkt
górowania
na równiku

kąt godzinny i rektascensja



punkt
górowania
na równiku

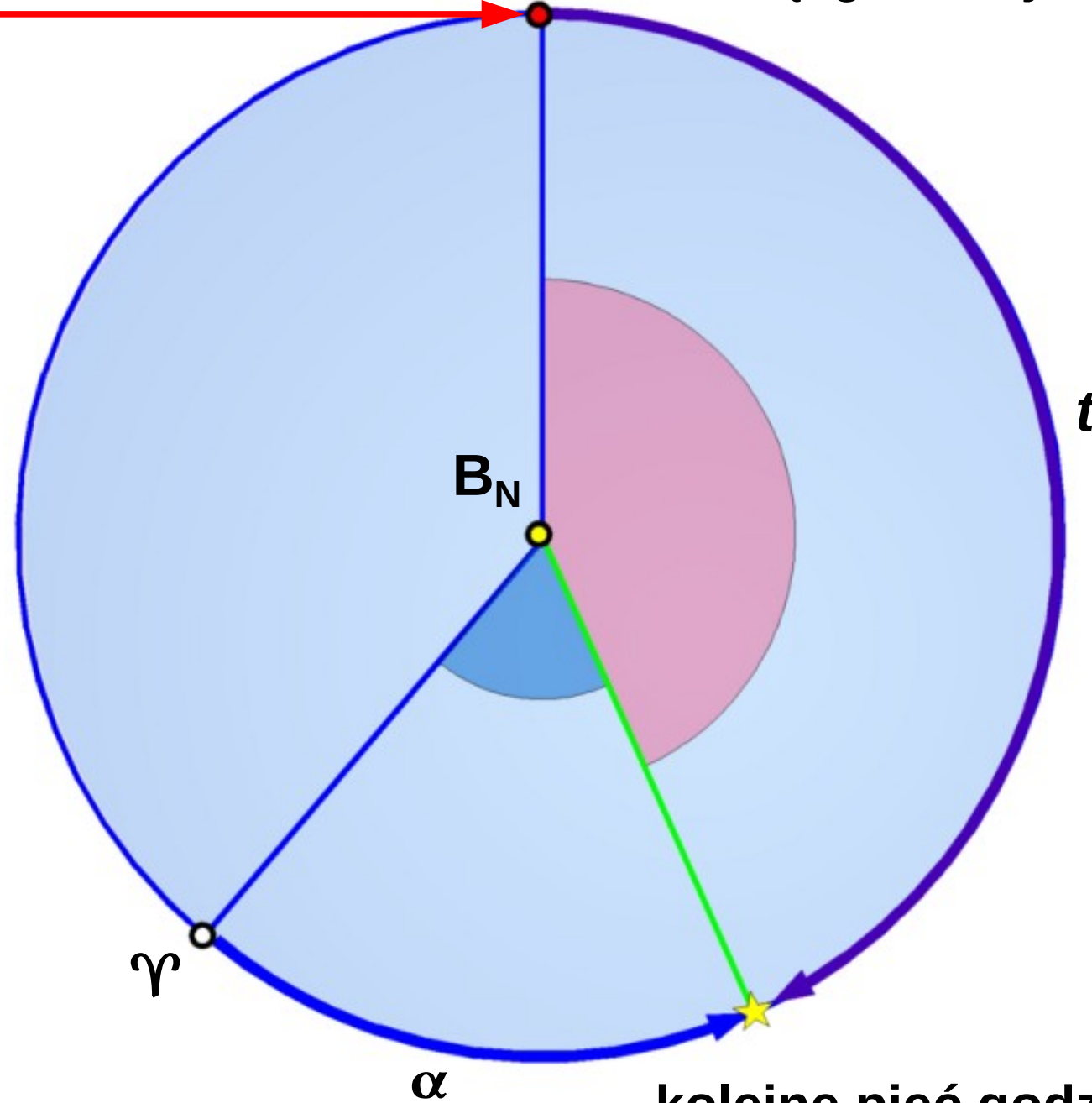
kąt godzinny i rektascensja



około dwie godziny później

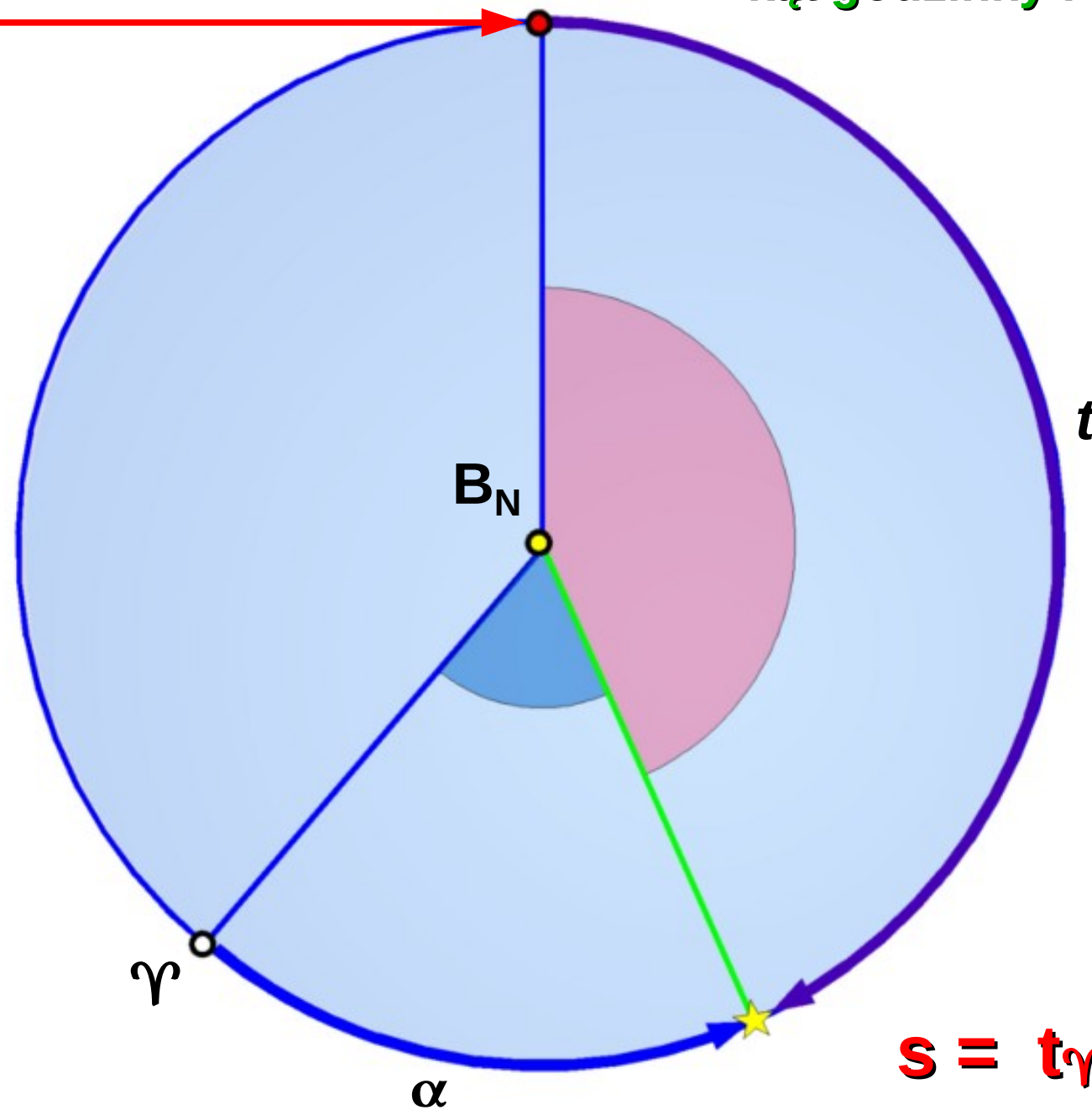
punkt
górowania
na równiku

kąt godzinny i rektascensja



punkt
górowania
na równiku

kąt godzinny i rektascensja



$$s = t_\gamma = t_* + \alpha_*$$

Związki układu równikowego godzinnego z równonocnym

Mając t i δ musimy zmienić układ lewoskrętny na prawoskrętny więc wyliczamy troszkę inaczej składowe wersora $r_{t,\delta}$:

$$x = \cos t \cos \delta$$

$$y = -\sin t \cos \delta$$

$$z = \sin \delta$$

Po transformacji odwrotnej też zmieniamy znak składowej y .

$$r_{\alpha,\delta} = R_z(-s) r_{t,\delta}$$

$$r_{t,\delta} = R_z(s) r_{\alpha,\delta}$$

gdzie s jest miejscowym czasem gwiazdowym

Operatory obrotu:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jeżeli przez $r_{\alpha,\beta}$ oznaczmy wektor, którego składowe x , y i z wyliczamy ze wzorów:

$$x = \cos \alpha \cos \beta$$

$$y = \sin \alpha \cos \beta$$

$$z = \sin \beta$$

to po transformacjach opisanych na poprzednich slajdach współrzędne kątowe wyliczymy ze wzorów:

$$\beta = \arcsin z$$

$$\alpha = \operatorname{atan2}(y / x)$$

$\theta = \operatorname{atan2}(z \cdot \sin \theta, z \cdot \cos \theta)$, z – dowolna stała dodatnia
a $\cos \beta$ jest zawsze dodatni bo $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$

Jak ktoś chce się pobawić rachunkami to więcej informacji znajdzie na stronie:

<https://apollo.astro.amu.edu.pl/PAD/pmwiki.php?n=Stud.DydaktykaTransformacje>

Dziękuję za uwagę