Zmienne uniwersalne w zagadnieniu dwóch ciał - kompendium.

Piotr A. Dybczyński

4 marca 2012

Obserwatorium Astronomiczne UAM, Poznań

Ten materiał stanowi streszczenie fragmentów pracy Everhart and Pitkin [1983], pomyślanej zresztą właśnie jako "tutorial". Opiszemy jak znając położenie i prędkość ciała na orbicie keplerowskiej w chwili t_o wyliczyć dokładnie położenie i prędkość w dowolnej innej chwili t_1 i to niezależnie od typu orbity (koło, elipsa, parabola czy hiperbola). Znajomość klasycznych, keplerowskich elementów orbity (czy jakiś innych) jest tu zbędna!

Jeśli ciało o masie m (planeta, kometa itp) porusza się jedynie pod wpływem grawitacji Słońca (o masie M) to jego ruch opisany jest równaniem:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{gdzie} \qquad \mu = G(M+m) \tag{1}$$

W równaniu tym $\boldsymbol{r}$ jest heliocentrycznym wektorem wodzącym ciała a G stałą grawitacji. Niech w pewnym momencie t_o położenie ciała m na orbicie będzie opisane wektorem $\boldsymbol{r}_o$ a jego prędkość w tej samej chwili wektorem $\boldsymbol{v}_o$. Wprowadźmy oznaczenia dwóch stałych:

$$\sigma_o = \boldsymbol{r}_o \cdot \boldsymbol{v}_o \qquad \text{oraz} \qquad \alpha = \frac{-\mu}{a} = v_o^2 - \frac{2\mu}{r_o} \tag{2}$$

a oznacza tu wielką półoś orbity, stała α jest więc proporcjonalna do energii całkowitej: ujemna dla elipsy, zerowa w przypadku paraboli a dodatnia dla orbity hiperbolicznej.

Wprowadzamy uniwersalną anomalię ψ dla której odpowiednikiem równania Keplera będzie równanie:

$$t_1 - t_o = r_o S_1 + \sigma_o S_2 + \mu S_3 \tag{3}$$

gdzie oczywiście wielkości S_1, S_2 oraz S_3 są funkcjami anomalii uniwersalnej ψ. Są to tak zwane uogólnione funkcje eliptyczne, opisane zawsze i szybko zbieżnymi szeregami. Jeśli dla skrócenia zapisu oznaczymy $\beta = \alpha\psi^2$ to ogólny wzór na szereg S_n ma postać:

$$S_n = \psi^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{\beta}{(n+2)!} + \frac{\beta^2}{(n+4)!} + \frac{\beta^3}{(n+6)!} + \frac{\beta^4}{(n+8)!} + \cdots \right) \tag{4}$$

a dodatkowo dysponujemy następującą zależnością rekurencyjną:

$$S_n = \frac{\psi^n}{n!} + \alpha S_{n+2} \tag{5}$$

Uniwersalne równanie Keplera (3) będziemy rozwiązywać metodą Newtona:

$$\psi_{k+1} = \psi_k - \frac{F(\psi_k)}{F'(\psi_k)} \tag{6}$$

gdzie: $F(\psi) = r_o S_1 + \sigma_o S_2 + \mu S_3 - (t_1 - t_o)$ oraz $F'(\psi) = r_o S_o + \sigma_o S_1 + \mu S_2 = r$. Jako pierwsze przybliżenie uniwersalnej anomalii można wziąć: $\psi_0 = (t_1 - t_o)/r_o$ (jeśli interwał czasu jest większy od okresu obiegu na orbicie eliptycznej należy ją zredukować o całkowitą wielokrotność tego okresu) lub jeszcze dokładniej: $\psi_0 = (t_1 - t_o)/r_o - (t_1 - t_o)^2 \sigma_o / 2r_o^3$. Do rozwiązania potrzeba bardzo niewiele iteracji. W rachunkach występują tylko S_o, S_1, S_2 oraz S_3. W praktyce, dla danej wartości ψ, wyliczamy więc ze wzoru (4) wielkości S_2 oraz S_3 a następnie korzystając z zależności rekurencyjnej (5) dostajemy $S_1 = \psi + \alpha S_3$ oraz $S_o = 1 + \alpha S_2$.

Składowe wektora położenia $\boldsymbol{r}_1$i wektora prędkości $\boldsymbol{v}_1$ na dowolny moment t_1 wyliczymy z dobrze znanych w mechanice nieba formuł:

$$\boldsymbol{r}_1 = f\boldsymbol{r}_o + g\boldsymbol{v}_o \qquad \text{oraz} \qquad \boldsymbol{v}_1 = f_1\boldsymbol{r}_o + g_1\boldsymbol{v}_o \tag{7}$$

po uprzednim wyliczeniu:

$$f = 1 - \frac{\mu S_2}{r_o} \qquad g = t_1 - t_o - \mu S_3 \qquad f_1 = \frac{-\mu S_1}{r_o r} \qquad g_1 = 1 - \frac{\mu S_2}{r} \tag{8}$$

Na koniec podpowiedź praktyczna. Tego typu rachunki (dla ciała o znikomej masie m) przeprowadza się zazwyczaj stosując tzw. jednostki kanoniczne. Chodzi o taki dobór jednostek (w tym wypadku jednostki czasu) by współczynnik μ był równy jedności. Jeśli rozważamy ruch heliocentryczny komety czy planetoidy to jednostką masy jest masa Słońca, jednostką odległości jednostka astronomiczna AU a jednostką czasu dającą $\mu = 1$ jest odwrotność stałej Gaussa: $1/0.01720209895 \cong 58.13244\ldots$ doby. W praktycznym rachunku oznacza to, że składowe wektora prędkości $\boldsymbol{v}_o$ musimy przed rachunkami podzielić przez $k = 0.01720209895$, momenty czasu t_o i t_1 musimy przed rachunkami pomnożyć przez k, natomiast po zakończeniu rachunków otrzymane składowe wektora prędkości $\boldsymbol{v}_1$ również pomnożyć przez k.

Literatura

E. Everhart and E. T. Pitkin. Universal variables in the two-body problem. *American Journal of Physics*, 51: 712–717, August 1983.